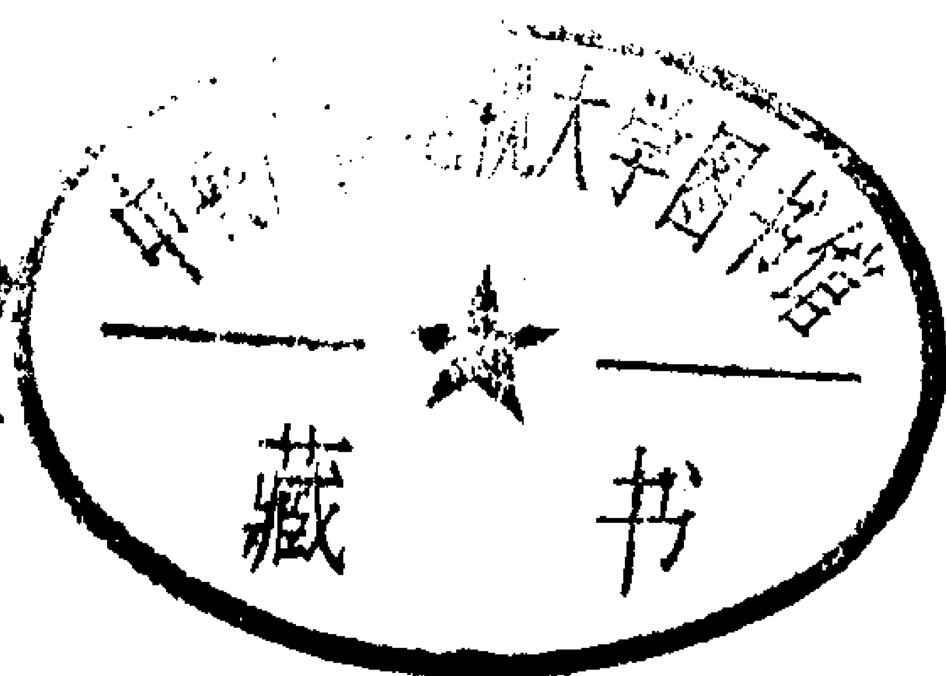


前　　言

常微分方程是数学的一个很重要的分支．其所以如此，大体上有两方面的原因．首先，它与生产实践和科学技术的联系极为密切．在变量进入数学之后，要用变量来描述与刻划某个过程中各个变量之间的关系，几乎都离不开微分方程．因此，微分方程从它诞生起就日益成为人们探求各种自然规律的有力工具，从而是数学解决实际问题的主要渠道之一；其次常微分方程几乎涉及到数学所有的学科，它一方面运用各个数学学科的理论与方法来解决自己的问题，同时又为其它的数学学科提出了很多新的课题．这些，我们以后会逐步看到的．

本书作为高等师范院校本科生及中学教师函授生的教材，我们在编写时，有以下几点想法．

1．反映高师特点，联系中学数学教学实际．

虽然在普通中学数学课中没有常微分方程的内容，但是，常微分方程与中学数学教学内容有着极其密切的联系．中学数学内容是数学最基础的知识，中学教师必须回答：这些知识为什么要讲？与以后的数学理论有什么关系？有什么用？在以后是如何用的？今后发展如何？有些什么基本的数学方法等等．而常微分方程，正如前面所说，它既与实际问题联系密切，又是各数学学科综合应用性强的学科，因此，对于上面提出的许多问题，能够做出很多有意思的回答．一方面可以使中学教师“居高临下”，另一方面又可以扩大知识面，充实加强对于中学数学内容的理解．我们尽可能在有关的部分自觉地进行这方面的联系．另外，我们还介绍了一部分历史材料，这对于中学教师也是很有益的．当然，这仅仅是一种探索性的尝试，有待进一步总结经验，继续改进．

2．“弹性”大一点．

各高师院校师资与学生情况很不同，本科与函授的差异也颇大，因此，我们在选材上“弹性”较大，有浅有深．既有主要的传统的内容，又对现代理论作了扼要的介绍；既有基本的解法，又编入了理论性较强的某些部份．这样，大家可以根据自己的情况进行取舍．较难的部份都打上了＊号．对于有条件的院校及基础较好的学生，可以提出较高的要求，为以后学习与研究打下较好的基础．

3．选配了充足的习题以期较好地培养学生分析问题解决问题的能力．

在每一节每一章都选配了相当多的习题，有计算题、证明题及应用题．使学生通过做习题得到很好的训练．特别是选了一批适合学生独立钻研的证明题，对于培养学生的论证能力很有益处．

4．力求文字通畅，便于自学．

本书是在1966年前的几版铅印稿及1977年的油印稿的基础上修订而成，虽然我们做了一定的努力，但是问题及错误肯定是会有的，请使用本教材的教师及同学提出宝贵的意见．

目　　录

第一章　初等积分法

§1.1　微分方程与解

1°. 读者在开始本课程时，第一个理所当然的问题，自然是：什么是微分方程？为了说明这个问题，先复习一下关于方程的一些基本概念.

所谓**方程**，在数学中是指那些含有未知量的等式，它表达了未知量所必须满足的某种条件. 方程的类型是繁多的，其分类的主要依据就是对未知量所施加的数学运算.

例如，在方程

$$x^3-2x+1=0;$$

$$\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x}=1;$$

$$\frac{3}{x+1}-\frac{x-1}{x}=2$$

中，对未知数 x 所施加的是代数运算，因此它们都是**代数方程**.

在方程

$$\sin x+\cos x=1;$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2};$$

$$e^x=x^2+2x-1$$

中，对未知量 x 所施加的是超越函数的运算，因此上列方程是**超越方程**.

微分方程与上述方程不同，它的未知量是**未知函数**，而施加于未知函数的运算则是**导数**或**微分**运算. 本课程是研究**常微分方程**的，方程中的未知函数都是**一元函数**，导数也就自然是对仅有的自变量的导数. 下列方程都是常微分方程或常微分方程组.

$y'=xy$（x 为自变量，y 为未知函数）；

$(t^2+x)dt+xdx=0$（t，x 何者为自变量任意）；

$y''+2y'-3y=e^x$（x 为自变量，y 为未知函数）；

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=y+x\end{cases}$$（x 为自变量，y 与 z 为未知函数）.

除了常微分方程以外，还有**偏微分方程**，偏微分方程中的未知函数是**多元函数**，施加于未知函数的运算是偏导数. 例如

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x+y$（$x$，$y$ 为变量，z 为未知函数）；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$（x，y，z 为自变量，u 为未知函数）.

本书只讨论常微分方程，偏微分方程留待其它课程去研究.

把以上的叙述概括一下，我们可以较确切地说：**常微分方程就是表达了自变量、未知函数以及未知函数的某些导数（或微分）之间的关系的方程式.**

常微分方程有着深刻而生动的实际背景，它在生产实践与科学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具. 下面介绍几个例子.

例1. 自然变化率问题.

我们知道，数学中有一个很重要的数

$$e \doteq 2.71828\cdots,$$

（字母 e 取自大数学家欧拉—Euler 的姓的第一个字母）它是自然对数的底. 在全国统编中学新教材的微积分部分，已经对它做了介绍. 这个数之所以为人们所重视，一个主要原因是它与自然界的一个重要现象有关. 这个现象就是：很多量（记为 $x(t)$）在随时间 t 的变化过程中（增加或减少），它们对时间 t 的瞬时变化率（即 $x(t)$ 对时间 t 的导数 dx/dt），与该量在该瞬时存有的数量成正比（这个规律有人称为**自然变化律**）.

例如细菌和牲畜的增殖，森林木材储量的增长都服从这个规律.

又如裂变物质（如鐳、鈾等），它们时刻都在裂变成其它的物质（如铅），从而质量逐渐减少. 根据测定，它们的裂变速度（即单位时间裂变的质量）与该物质的瞬时存有质量成正比.

再如在某介质中的物体的冷却过程，服从**牛顿（Newton）冷却定律**，它指出：物体的温度的下降速度与该物体的温度和介质的温度之差成正比.

我们来把自然变化律用数学形式表达出来.

设所考虑的变量为 x，时间为 t 于是，有关系

$$\frac{dx}{dt}=kx, \tag{1.1}$$

（当 x 增加时，$k>0$；当 x 减少时，$k<0$）. 这是一个关于未知函数 x 的常微分方程.

为了求出未知函数 $x=x(t)$，可以把（1.1）变形为

$$\frac{dx}{x}=kdt,$$

然后两端积分，得到

$$\ln|x|=kt+c_0 \quad (c_0 \text{ 为一常数}).$$

或者

$$x(t)=ce^{kt} \quad (c=\pm e^{c_0}).$$

如果已知在时刻 $t=t_0$ 时，变量 $x=x_0$，应有 $x(t_0)=x_0$. 将这个**初始条件**代入上式，应有

$$x_0=ce^{kt_0},\quad c=x_0e^{-kt_0}.$$

从而求得

$$x(t)=x_0e^{k(t-t_0)}.$$

即符合自然变化律的变量，都按以 e 为底的指数函数进行变化．

例2． 抛物线的光学性质．

在中学平面解析几何中已经指出，汽车前灯和探照灯的反射鏡面都取为旋转抛物面，就是将抛物线绕对称轴旋转一周所形成的曲面．将光源安置在抛物线的焦点处，光线经鏡面反射就成为平行光线了．这个问题在平面解析几何中已经作了证明，但是，今天我们要提出两个问题：首先，人们是如何发现抛物线有这个性质的？其次，具有前述性质的曲线是否只有抛物线？这些问题的解决都依赖于常微分方程．

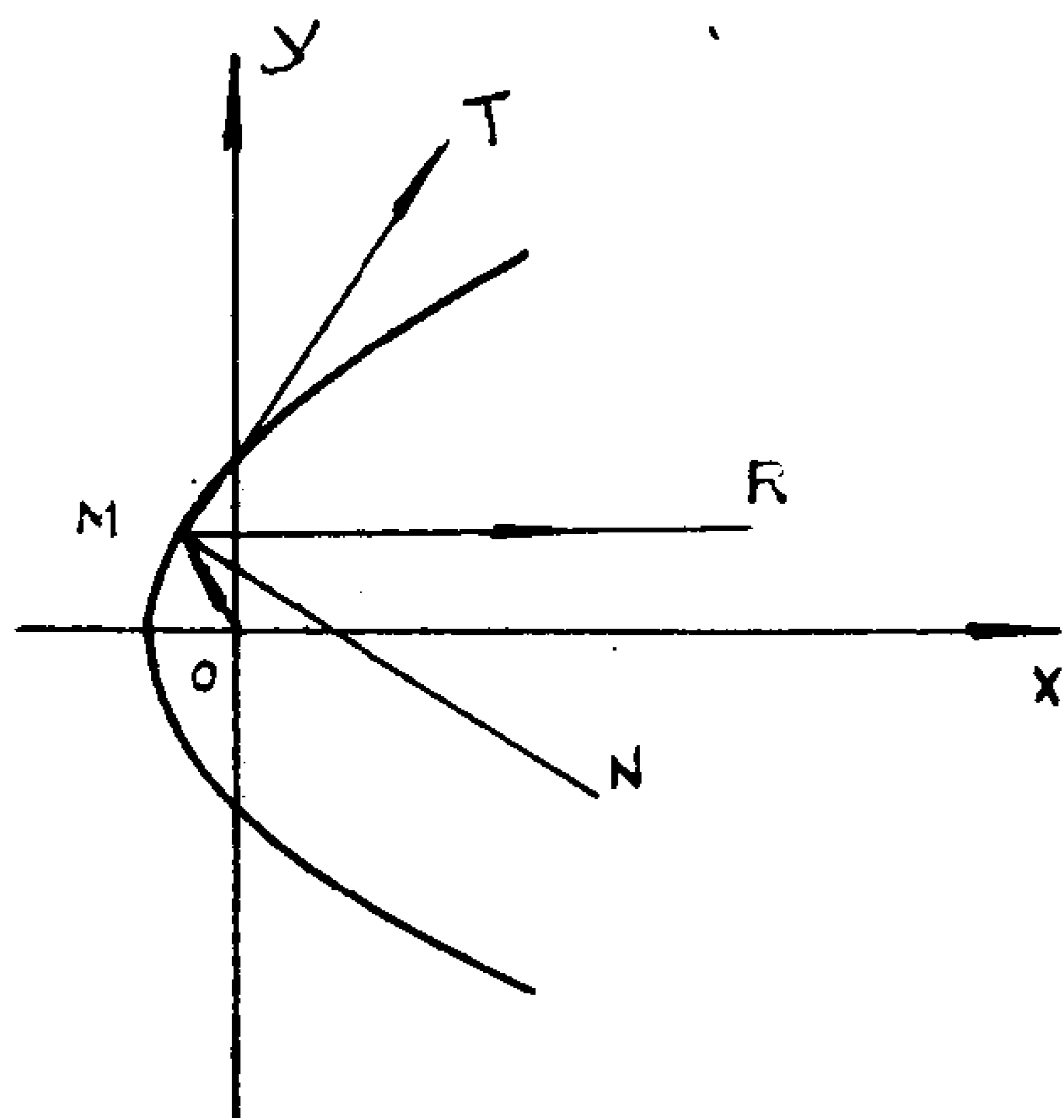


图 1.1

由于对称性，只考虑在过旋转轴的一个平面上的轮廓线 l．如图 1.1，以旋转轴为 Ox 轴，光源放在原点 $O(0,0)$．设 l 之方程为 $y=y(x)$．由 O 点发出之光线经鏡面反射后平行于 Ox 轴．

设 $M(x,y)$ 为 l 上任一点．光线 $\overrightarrow{OM}$ 经反射后为 $\overrightarrow{MR}$．$\overline{MT}$ 为 l 在 M 点的切线．$\overline{MN}$ 为 l 在 M 点的法线，根据光线的反射定律，有

$$\angle OMN=\angle NMR,$$

从而

$$\operatorname{tg}\angle OMN=\operatorname{tg}\angle NMR,$$

因为 $\overline{MT}$ 的斜率为 y'，$\overline{MN}$ 的斜率为 $-\frac{1}{y'}$．所以由夹角正切公式，有

$$\operatorname{tg}\angle OMN=\frac{-\frac{1}{y'}-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{xy'}},$$

$$\operatorname{tg}\angle NMR=\frac{1}{y'},$$

从而

$$\frac{1}{y'}=-\frac{x+yy'}{xy'-y},$$

即到得微分方程

$$yy'^2+2xy'-y=0. \tag{1.2}$$

于是，求曲线 l 的问题就变成要从上面的微分方程中求未知函数 y 的问题了．这个问题留待后面去解决，但是可以予先指出，只有抛物线才具有所要求的性质．

例3． 受空气阻力的自由落体．

设质量为m的物体，在时间 $t=0$ 时自由下落，在空气中受到的阻力与物体的下落速度成正比，求物体下落距离与时间的关系、

如图 1.2 建立坐标系. 设 x 为物体下落的距离. 于是物体下落的速度为

$$v=\frac{dx}{dt},$$

加速度为

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

根据牛顿第二定律 $F=ma$，可以列出方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}+mg, \tag{1.3}$$

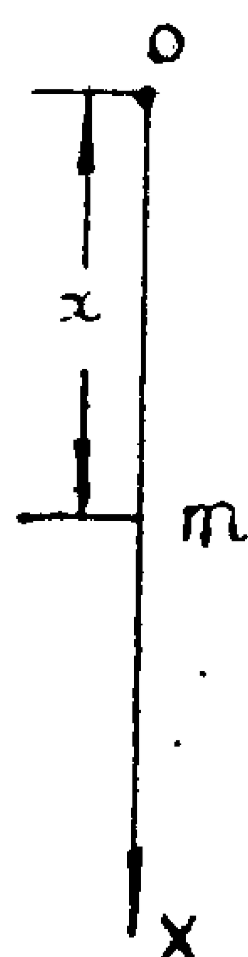


图 1.2

其中 k 为一正比例常数，右端第一项的负号表示阻力与$\frac{dx}{dt}$方向相反.

于是，问题又归结为求满足上述方程的未知函数 $x(t)$ 的问题.

从以上三个例子中我们看到，由实际问题中提出来的微分方程是各式各样的，但是，我们以后会看到，可以把微分方程按照某些属性加以分类，再根据各种类型的特点去进行研究. 微分方程分类的依据也是很多的，但是，一个很基本的依据就是在微分方程中所出现的**未知函数的导数的最高阶数**. 我们把它称为**微分方程的阶**. 例如，方程(1.1)及（1.2）的阶都是 1，因此称它们是**一阶方程**. 而（1.3）中未知函数的最高阶数为 2，所以它的阶就是 2，它就是**二阶方程**. 以后我们还会看到更高阶的方程.

微分方程的**阶**有点类似代数方程的**次**. 而且，以后会看到，有些类型的微分方程的阶数与某些次数等于其阶数的代数方程，有着极为密切的联系，请读者加以注意.

一阶常微分方程的一般形式可以表为

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.4}$$

或

$$y'=f(x,y), \tag{1.5}$$

或

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{1.6}$$

（1.4）称为**一阶隐方程**. （1.5）称为**一阶显方程**. （1.6）称为**微分形式**的一阶方程.

方程（1.2）是一阶隐方程，（1.1）是一阶显方程.

方程

$$xdx+ydy=0$$

及

$$(t^2+x)dt+xdx=0$$

都是微分形式的一阶方程.

n 阶显式方程的一般形式记为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{1.7}$$

n阶隐式方程的一般形式记为

$$F(x,y,y',\cdots\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1.8}$$

2°. 代数方程与超越方程的主要问题之一就是求方程的**根**. 所谓方程

$$f(x)=0$$

的根x_0是指这样的数，在方程中令$x=x_0$时，等式

$$f(x_0)=0$$

成立.

与此相类似，微分方程的主要问题之一是求方程的**解**. 一般地说，微分方程的解就是满足方程的函数。可定义如下。

定义1.1. 设函数$y=y(x)$在〔a,b〕上有定义，且存在n阶导数，如果把$y=y(x)$代入方程

$$F(x,y,y'\cdots\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1.8}$$

得到在区间〔a,b〕上的恒等式

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots\cdots,y^{(n)}(x))\equiv 0,$$

则称$y=y(x)$为方程（1.8）在〔a,b〕上的一个解。

这个定义是就（1.8）在闭区间〔a,b〕上叙述的，对于其它形式的方程或区间，也可以相应地叙述，在此不去重复了。

易于验证函数

$$y=x^2+c\ (c\text{ 为任意常数})$$

为微分方程

$$y'=2x$$

的解。

函数

$$y=e^x+c_1x+c_2x\ (c_1,c_2\text{ 为任意常数})$$

为微分方程

$$y''=e^x$$

的解.

例4. 验证函数$y=\frac{c}{2}x^2-\frac{1}{2c}$（$c$为任意常数）为方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

的解。

解. 将所给函数代入方程左端得

$$y'=cx.$$

代入右端得

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\left(\frac{c}{2}x-\frac{1}{2cx}\right)+\sqrt{1+\left(\frac{c}{2}x-\frac{1}{2cx}\right)^2}$$

$$=\frac{c^2x^2-1}{2cx}+\frac{c^2x^2+1}{2|cx|}.$$

当 $cx>0$ 时，两端恒等．当 $cx<0$ 时，两端不恒等．所以，当 $c>0$ 时，所设函数为方程在 $(0,+\infty)$ 上的解；而当 $c<0$ 时，所设函数为方程在 $(-\infty,0)$ 上的解．

例5． 验证函数

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x\ (c_1,\ c_2\text{为任意常数})$$

为方程

$$y''+y=0$$

在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的解．

解． 事实上，在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上有

$$y''=-(c_1\cos x+c_2\sin x),$$

所以在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上有

$$y''+y\equiv 0,$$

从而所设函数为方程的解．

为了便于研究方程的解的性质，我们常常考虑解的图象，并且称之为微分方程的**积分曲线**．以后，为了叙述简便，我们对解和积分曲线这两个名词在很多情形都不加以区别．

在很多实际问题中，我们必须求微分方程满足初始条件的解．

例如在例 1 中，设时刻 $t=t_0$ 时，变量 $x=x_0$，函数

$$x(t)=x_0e^{k(t-t_0)}$$

就是方程

$$\frac{dx}{dt}=kx$$

的满足初始条件

$$y(t_0)=x_0$$

的解．

一阶方程 (1.4) 、 (1.5)及 (1.6) 的初始条件为

$$y(x_0)=y_0.$$

求微分方程的满足初始条件的解的问题称为**初值问题**．方程 (1.5) 的初值问题常记为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}\tag{1.9}$$

初值问题也常称为**柯希 (Cauchy) 问题**．初值问题(1.9) 的几何意义是在 xoy 平面上求经过点 $(x_0,\ y_0)$ 的积分曲线．

例6． 求解初值问题

$$\begin{cases} y'=2x \\ y(1)=4. \end{cases}$$

解. 前面已知函数 $y=x^2+c$（c 为任意常数）的解. 为了这函数能满足初始条件 $y(1)=4$，只须将它代入 $y=x^2+c$，即有 $c=3$，于是，$y=x^2+3$ 为所求初值问题的解.

高阶方程也有初值问题. 如例 3 中，因为物体为自由下落，故当时间 $t=0$ 时，速度 $v=\frac{dx}{dt}=0$. 同时，时间 $t=0$ 时，物体的位移 $x=0$，因此，物体下落的距离应当满足初始条件

$$x(0)=0, \ \dot{x}(0)=0.$$

（$\dot{x}$ 代表 x 对时间的导数）.

n 阶方程（1.7）及（1.8）的初始条件为

$$y(x_0)=y_0, \ y'(x_0)=y'_0, \ \cdots\cdots, \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

从前面的讨论中，还可以看到一个重要的事实，就是**微分方程存在含有任意常数的解**. 而且，我们也看到，**解中任意常数的个数可以多到与方程的阶数相等**. 当这些常数变化时，可以得到方程的无限多个解. 于是，我们有如下的定义.

定义1.2. 如果 $y=\varphi(x,c)$ 为一阶方程的解，其中 c 为任意常数，且对于区域 G 中任一点 (x_0, y_0)，该方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解都包含在 $y=\varphi(x,c)$ 之中，则称 $y=\varphi(x,c)$ 为该方程在区域 G 上的**通解**.

由上述定义可知，G 上的通解包含了其积分曲线在 G 内的全部的解.

于是，可证 $y=x^2+c$ 为方程 $y'=2x$ 在 xoy 平面上的通解，$y=ce^x$ 也为方程 $y'=y$ 在 xoy 平面上的通解.

n 阶方程的通解的一般形状为

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n).$$

我们就不像一阶方程那样去定义了.

例如 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 为方程

$$y''+y=0$$

的通解.

如果已求得微分方程的通解，要求指定的初始条件的**特解**，可以由初始条件去确定通解中的任意常数.

对于一阶方程而言，设已知通解为 $y=\varphi(x,c)$. 要求满足初始条件

$$y(x_0)=y_0$$

的**特解**. 为了确定 $y=\varphi(x,c)$ 的 c，将 $y(x_0)=y_0$ 代入，得到方程

$$y_0=\varphi(x_0,c).$$

一个方程一般可以确定出 c 来，设为 c_0，代入通解，即得满足初始条件的解 $y=\varphi(x,c_0)$.

但对于 n 阶方程，因为它的通解中有 n 个任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，所以，为了确定它们，就必须有 n 个初始条件：

$$y(x_0)=y_0, \ y'(x_0)=y'_0, \ \cdots, \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

代入通解 $y=\varphi(x,c_1,c_2\cdots\cdots,c_n)$ 后，得到 n 个方程式

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_n) \\ y'_0=\varphi'(x_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_n)\ . \end{cases}$$

一般说来，可以解出 c_1^0，c_2^0，…，c_n^0，代回通解，即得所求初值问题的特解

$$y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0,\cdots,c_n^0).$$

例7. 求方程

$$y''+y=0$$

的满足 $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 的解.

解. 方程通解为

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x.$$

求导数后得

$$y'=c_1\cos x-c_2\sin x.$$

将初始条件代入，得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}c_1+\frac{\sqrt{2}}{2}c_2=1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}c_1-\frac{\sqrt{2}}{2}c_2=-1 \end{cases}$$

解出得

$$c_1=0\ ,\qquad c_2=\sqrt{2}.$$

故所求特解为

$$y=\sqrt{2}\cos x.$$

这一节主要是介绍常微分方程的一些最基本的概念，本章其余的几节将要讨论某些具体类型的常微分方程的**初等解法**. 初等解法也称为**初等积分法**. 其所以称为初等积分法，是因为这些解法最后都把求解的问题化成求积分的问题. 其实，常微分方程求解问题就是求原函数或不定积分的推广. 不定积分是已知未知函数的导数去求原函数，常微分方程则是已知未知函数的导数所满足的方程去求未知函数. 因而，求解常微分方程化成求积分就是很自然的了. 初等解法就是将常微分方程的求解问题化成积分问题，并将方程的通解用初等函数或它的积分表达出来. 凡是能做到这一点的常微分方程，称为**可积的方程**. 下面几节就是介绍某些可求积方程的解法.

习　　题 1.1

1. 指出下列微分方程的阶数：

1) $\frac{dy}{dx}=y^2+x^3$　　　2) $\frac{d^2y}{dx^2}=x+\sin x$

3) $y^3\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$　　　4) $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=4$

5）$\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=0$

2．验证给出的函数是否为相应微分方程的解

1）$5\frac{dy}{dx}=3x^2+5x$；　　$y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+c$

2）$\frac{dy}{dx}=P(x)y$；　　$y=ce^{\int P(x)dx}$

3）$(x+y)dx+xdy=0$；　　$y=\frac{c^2-x^2}{2x}$

4）$y''=x^2+y^2$；　　$y=\frac{1}{x}$

3．写出下列曲线族所满足的微分方程

1）$y=e^{cx}$　　2）$y=(x-c)^3$

3）$y=\sin(x+c)$　　4）$x=ay^2+by+c$

4．写出圆心在x轴上半径为r的圆族的微分方程．

§1.2　变量可分离方程

从本节到§1.5，我们将介绍几种常见的可积的显式一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.5}$$

这些内容虽然简单，但都是常微分方程求解的基本方法，而且在实际中它们还有广泛的应用．

首先，我们来讲最简单的一种类型，就是**变量可分离方程**

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y). \tag{1.10}$$

也就是方程（1.5）的右端函数可以分解成两个分别只含x或y的因子．

这种方程与代数中的可分解因式的方程有些类似，代数方程只要可以分解为一次或二次因子，就立即可以用公式求根了．相类似的，只要（1.5）可以写成（1.10），求解就好办了，因为（1.10）可以变形为

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx.$$

这个方程两端都是只含一个变量的微分式，可以进行积分

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c.$$

于是就得到未知函数y与自变量x的关系了．这就是变量可分离方程求解的基本方法．但是，由于（1.10）是我们所接触到的第一类具体的方程，我们还要对它的解法较详细地予以说明．

首先，我们总是假定在$f(x)$与$\varphi(y)$连续的区域内来进行讨论.

其次，我们指出：**假如常数 y_0 使得 $\varphi(y_0)=0$，则函数 $y=y_0$ 为(1.10)的常数解**. 事实上，以 $y=y_0$ 代入（1.10），两端都恒等于0，从而使方程变成恒等式，因此，$y=y_0$ 是（1.10）的解.

下面来探讨在$\varphi(y)\neq 0$的情形下，方程（1.10）的求解方法.

先进行分析，设 $y(x)$ 为（1.10）在$[a,b]$上的一个解，根据解的定义，在$[a,b]$上应有恒等式

$$\frac{dy(y)}{dx}\equiv f(x)\varphi(y(x)).$$

因为$\varphi(y)\neq 0$，于是有

$$\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv f(x)dx.$$

两端积分，得到

$$\int\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv\int f(x)dx+c,$$

其中 c 为某一常数. 于是可知 $y=y(x)$满足方程

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c. \tag{1.11}$$

或者说，**$y=y(x)$ 是由方程（1.11）所确定的一个隐函数**.

再来证明：如果（1.11）存在隐函数 $y=y(x)$，则 $y=y(x)$ 必为微分方程(1.10)的解.

事实上，因为 $y=y(x)$ 为（1.11）所确定的隐函数，所以存在常数 c，使得

$$\int\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv\int f(x)dx+c$$

将两端微分，即得

$$\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv f(x)dx.$$

因已设$\varphi(y)\neq 0$，故

$$\frac{dy(x)}{dx}\equiv f(x)\varphi(y(x)),$$

即 $y=y(x)$ 为（1.10）的解.

把上述讨论总结起来，就是：方程（1.10）的解完全由隐函数方程（1.11）所确定. 或者说（1.11）**是微分方程（1.10）的解的隐式表达式**.

在常微分方程中，通常把解的隐式表达式称为微分方程的**积分**（请不要与积分学中的积分相混. 但是，人们最初的确是由积分法求得解的隐式表达式的），所以，(1.11)是（1.10）的积分. 又因（1.11）中含有任意常数 c，故由它所确定的隐函数也含有任意常数 c，即 $y=y(x,c)$. 因为（1.11）包含了在 $\varphi(y)\neq 0$ 的区域内的所有的解，故 $y=y(x,c)$ 包含了$\varphi(y)\neq 0$ 的区域内的所有的解，从而它是（1.10）的**通解**. 于是，

(1.11) 是方程 (1.10) 的通解的隐式表达式，我们把方程的通解的隐式表达式称为方程的**通积分**. 所以，(1.11) 是 (1.10) 的通积分.

到此，方程 (1.10) 求解问题已完全解决，即首先解 $\varphi(y)=0$，求得常数解 $y=y_0$，再由 (1.11) 求得 $\varphi(y)\neq 0$ 时的通积分.

例1. 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

解. 首先，$y=0$ 是方程的解.

当 $y\neq 0$ 时，方程化为

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

两端积分，即得通积分

$$\ln|y|=\ln|x|+c_1,$$

或

$$\ln|y|=\ln|cx|\ (c\neq 0).$$

解出 y，得到 $y\neq 0$ 时的通解

$$y=cx\ (c\neq 0).$$

但是，$c=0$ 时，$y=cx$ 即为 $y=0$，仍为方程的解，故

$$y=cx$$

为方程在整个 xoy 平面上的通解.

例2. 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解. 首先看到 $y=\pm 1$ 为方程的解.

当 $y\neq\pm 1$ 时，方程的通积分为

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+c_1,$$

即

$$\arcsin y=\arcsin x+c_1.$$

解出 y，得到通解

$$\begin{aligned}y&=\sin(\arcsin x+c_1)\\&=x\cos c_1+\sin c_1\cdot\cos(\arcsin x)\\&=x\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

例3. 求方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$$

的满足初始条件 $y(0)=1$ 及 $y(0)=0$ 的解.

解. 易知 $y=\pm 1$ 为方程的解. 解 $y=1$ 显然满足初始条件 $y(0)=1$，故它是所求

的第一个解.

当 $y \neq \pm 1$ 时，方程通积分为

$$\int \frac{2dy}{y^2-1} = x + c_1,$$

即

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + c_1,$$

因此

$$\frac{y-1}{y+1} = ce^x.$$

解出通解为

$$y = \frac{1+ce^x}{1-ce^x}.$$

为求满足初始条件 $y(0)=0$ 的解，以 $y(0)=0$ 代入上解，应有

$$0 = \frac{1+c}{1-c},$$

可解得 $c=-1$. 代入通解，即得满足 $y(0)=0$ 的解

$$y = \frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

在通解公式中，当 c 为负数时，通解所对应的积分曲线位于带形区域 $-1<y<1$ 之中；而当 c 为正数时，它确定了两条积分曲线，其中一条定义于 $-\infty<x<-\ln c$ 上，它位于半平面 $y>1$ 上；另一条定义于 $-\ln c<x<+\infty$，它位于半平面 $y<-1$ 上. 图 1.3 描绘了所给方程的积分曲线的分布状况.

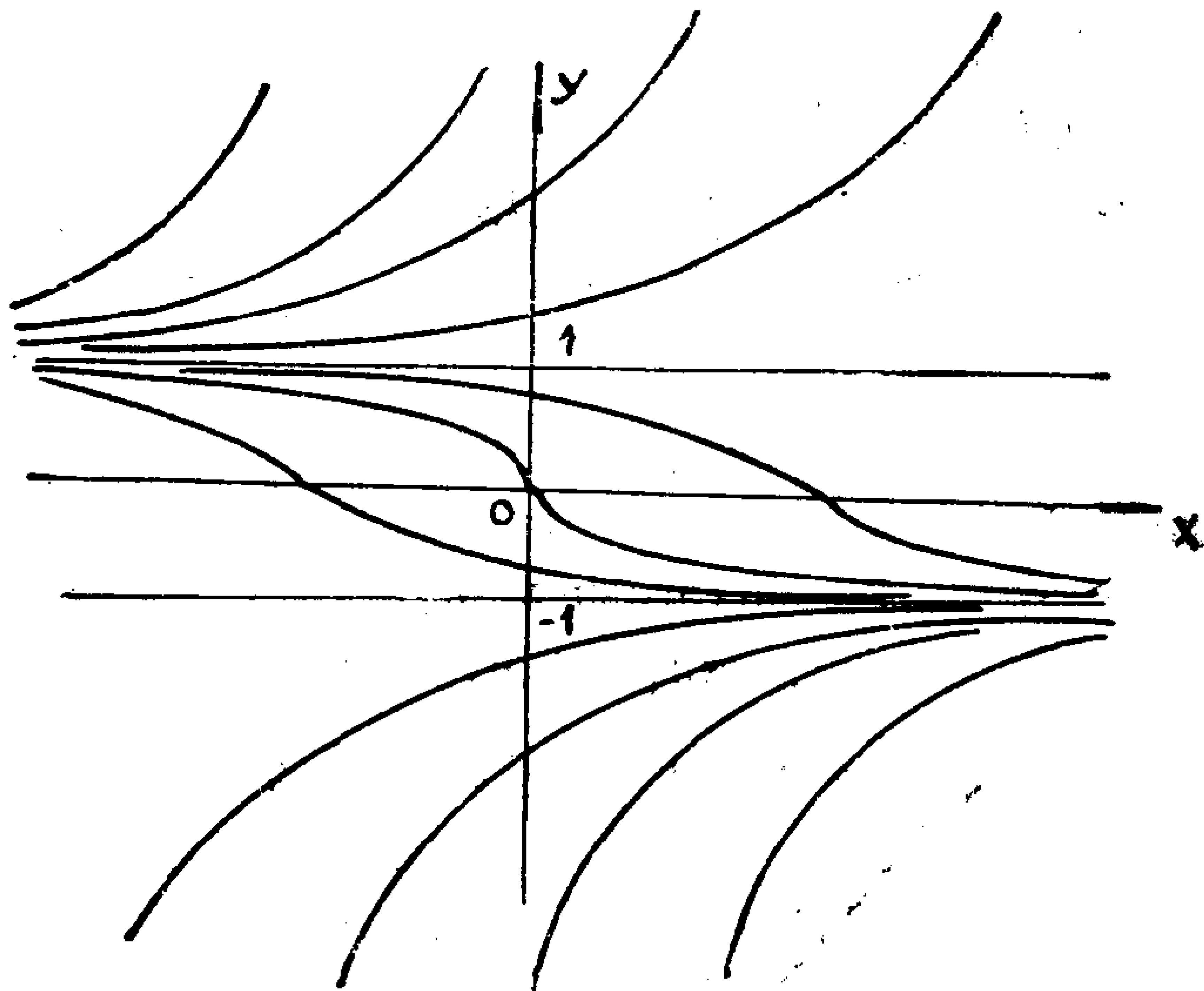


图 1.3

变量分离方程经常以微分的形式出现，即

$$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0. \tag{1.12}$$

这时，x 和 y 的地位是"平等的"，即 x 与 y 都有可能选为自变量或函数.

首先看到，如果 $N(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 为方程的解. 同样，如果，$P(x_0)=0$，则 $x=x_0$ 也是方程的解. 在求解中不要丢失这些解.

当 $N(y)P(x)\neq 0$ 时，用它除（1.12）两端，方程变成

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx+\frac{Q(y)}{N(y)}dy=0.$$

这时，变量已分离了，两端积分，即得通积分

$$\int\frac{M(x)}{P(x)}dx+\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy=c. \tag{1.13}$$

例4. 求解方程

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

解. 首先，易于看出 $y=\pm 1$，$x=\pm 1$ 为方程的解.

两端同除以 $(x^2-1)(y^2-1)$，得到

$$\frac{x\,dx}{x^2-1}+\frac{y\,dy}{y^2-1}=0.$$

积分即得方程的通积分

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|c| \quad (c\neq 0).$$

或

$$(x^2-1)(y^2-1)=c \quad (c\neq 0).$$

我们注意到，当 $c=0$ 时，这个通积分包括了前面提到的特解 $y=\pm 1$ 和 $x=\pm 1$.

在这里，我们特别指出，在分离变量方程化简的过程中，要注意**丢解**与**增解**的问题. 这个问题与代数方程求根要注意丢根与增根是相似的. 当以某函数 $\mu(x,y)$ 乘方程时，要防止增解；而以 $\mu(x,y)$ 除方程时，要防止丢解；假如 $\mu(x,y)\neq 0$，则用它乘或除方程时，不会有增解或丢解出现. 这个事实说明，在高等数学与初等数学之间，有许多思想是一脉相承的，掌握了这些思想，就可以举一反三，触类旁通.

我们还指出，当求得一个方程的通积分后，通常就认为求解过程已经完成. 一般来说，并不勉强从其中求出解的显式表达式来，因为这一步并不容易做到.

为了求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y),\\ y(x_0)=y_0.\end{cases} \tag{1.14}$$

在通积分（1.13）中采用定积分是比较方便的. 即把（1.13）改为

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx+c.$$

以 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入，应有 $c=0$. 于是初值问题（1.14）的解由方程的积分

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$$

所确定的隐函数给出.

以例 3 的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(y^2-1) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

为例．它的积分为

$$\int_0^y \frac{2dy}{y^2-1}=\int_0^x dx,$$

即

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x,$$

或

$$\frac{y-1}{y+1}=\pm e^x.$$

右端取“+”号时，不满足 $y(0)=0$，故取“−”号．解出 y，得到解

$$y=\frac{1-e^x}{1+e^x},$$

与前面所求结果一致．

最后，我们还指出一点，就是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y) \\ y(x_0=y_0 \end{cases}$$

的解不一定是唯一的．请看下面的例．

例5. 求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{|y|} \\ y(0)=0. \end{cases}$$

解． 显然 $y=0$ 为所求的一个解．

再求通解．当 $y>0$ 时，方程为

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y},$$

积分后得通积分

$$\sqrt{y}=x-c,\quad (x>c),$$

或

$$y=(x-c)^2,\ (x>c).$$

经验算，$x=c$ 时，$y=(x-c)^2$ 也满足方程．故 $y\geqslant 0$ 的通解为

$$y=(x-c)^2\ (x\geqslant c).$$

同样可求得 $y\leqslant 0$ 的通解为

$$y=-(x-c)^2\ (x\leqslant c).$$

以 $x=0$，$y=0$ 代入，得 $c=0$．即

$$y=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$$

为方程满足 $y(0)=0$ 的解 (图1.4).

于是所求初值问题的解有两个.

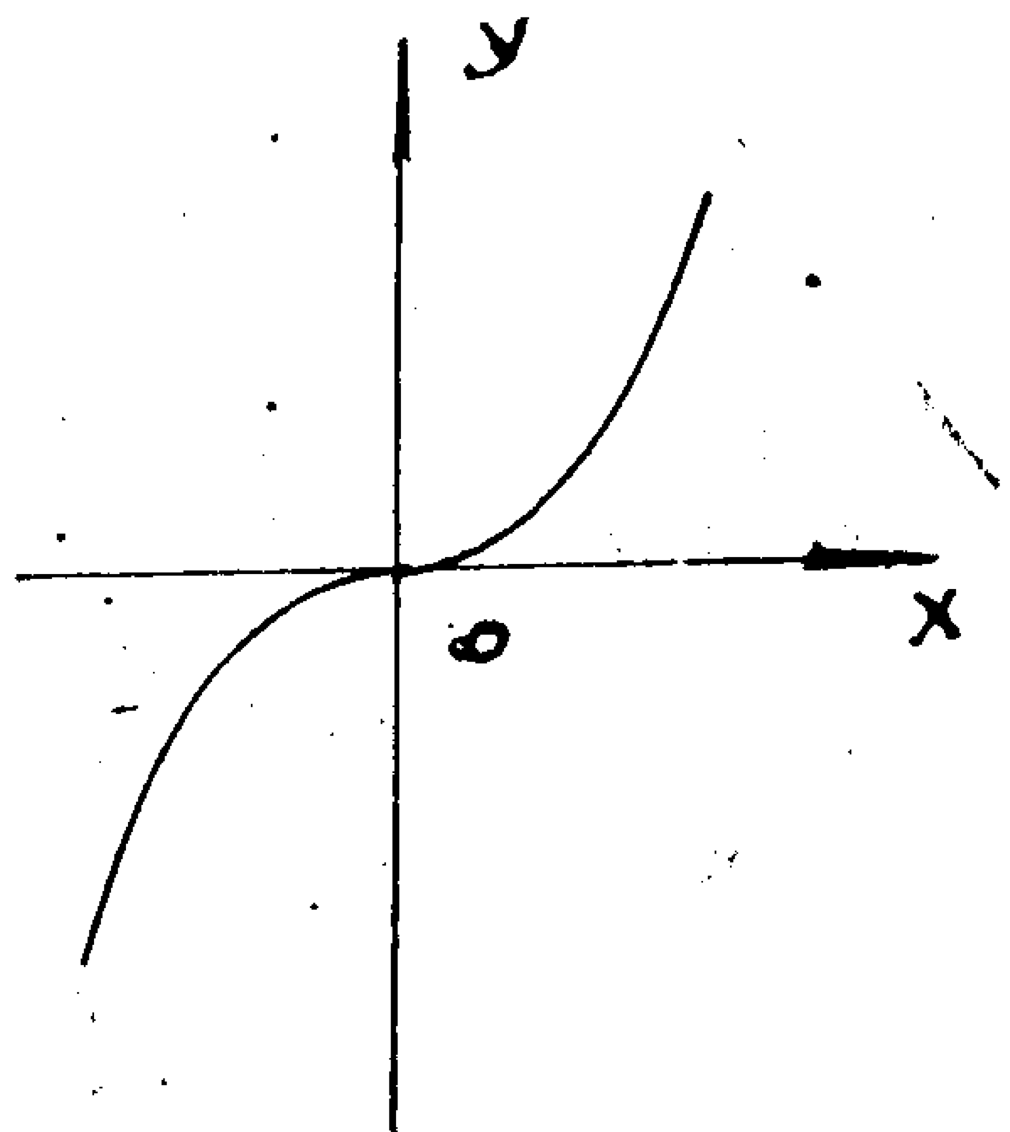


图 1.4

习 题 1.2

1. 求下列可分离变量微分方程的通解:

   1) $ydy=xdx$

   2) $\dfrac{dy}{dx}=y\ln y$

   3) $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}$

   4) $\mathrm{tg}\,y\,dx-\mathrm{ctg}\,x\,dy=0$

2. 求下列方程满足给定初始条件的解:

   1) $\dfrac{dy}{dx}=y(y-1)$, $y(0)=1$ 2) $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$

   3) $y'=3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2)=0$ 4) $(x+2y)y'=1$, $y(0)=-1$

3. 求解方程 $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$

4. 求一曲线, 使其上每一点的切线斜率为该点横坐标的二倍, 且通过点 $P(3,4)$.

5. 用变量变换化为可分离变量方程求解:

   1) $y'=\cos(x-y)$ 2) $(x+y)^2y'=a^2$

6. 求一曲线, 使其具有如下性质: 曲线上各点处的切线, 切点到原点的向径及 x 轴可围成一个等腰三角形 (以 x 轴为底), 且通过点 (1,2).

7. 人工繁殖细菌, 其增长速度和当时的细菌数成正比.

   1) 如果过 4 小时的细菌数即为原细菌数的 4 倍, 那么经过12小时应有多少?

   2) 如在 3 小时的时候, 有细菌 10^4 个, 在 5 小时的时候有 4×10^4 个, 那么在开始时有多少个细菌?

§1.3 齐 次 方 程

我们先来看一道中学里常见的习题, 即求解方程组

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^2=0 \\ 2x^2-y^2=1. \end{cases}$$

考虑到第一个方程左端是关于 x, y 的二次齐次多项式, 以 x^2 除第一式, 得

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\left(\frac{y}{x}\right)+1=0,$$

即可解得

$$\frac{y}{x}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \text{ 或 } y=\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)x,$$

代入第二式就可以求得方程的解了．

类似于上述方法的**变量变换**的思想就是这一节要讲的求解齐次方程的基本思想．

早期的数学家在研究曲线的性质时，发现问题经常归结为求解这样一类一阶常微分方程式，即方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.5}$$

的右端函数为一分式，而分子与分母是关于 x 和 y 的**同次齐次多项式**，如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha x+\beta y}{\gamma x+\delta y},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x^2+b_1xy+c_1y^2}{a_2x^2+b_2xy+c_2y^2}$$

等等．于是，人们就开始研究求解它们的方法．因为分子分母为同次齐次多项式，所以右端可以仿照前面讲过的求解代数方程的方法，用 x 的相应的幂来除分子分母，把右端化成 $\left(\frac{y}{x}\right)$ 的函数．如上二式可以化成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha+\beta\left(\frac{y}{x}\right)}{\gamma+\delta\left(\frac{y}{x}\right)},$$

及

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1\left(\frac{y}{x}\right)+c_1\left(\frac{y}{x}\right)^2}{a_2+b_2\left(\frac{y}{x}\right)+c_2\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

于是，上述的方程可以归结为形如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.15}$$

的方程．这类方程当然比上述的方程广泛得多．如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\gamma x+\delta y}\right),$$

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x^2+b_1xy+c_1y^2}{a_2x^2+b_2xy+c_2y^2}\right),$$

以及

$$x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$$

等等．

方程（1.15）称为**齐次方程**．这个名称反映了它的最早的形状．

齐次方程的解法就是利用本节一开始所提到的变量变换的思想．

令 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=xu$，

代入（1.15），得

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u),$$

或

$$x\frac{du}{dx}=f(u)-u,$$

及

$$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}. \tag{1.16}$$

这是一个变量可分离的方程，它的求解问题已经解决．但为弄清方程（1.15）的解的形状，我们再多讨论几句．

若存在 u_0，使 $f(u_0)-u_0=0$，则 $u=u_0$ 是（1.16）的解，代回（1.15），得到齐次方程（1.15）的解

$$y=u_0x.$$

当 $f(u)-u\neq 0$ 时，（1.16）的通积分为

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|c_1x|,$$

或

$$c_1x=e^{\int\frac{du}{f(u)-u}},$$

即

$$x=ce^{\varphi(u)},\quad \varphi(u)=\int\frac{du}{f(u)-u}.$$

以 $u=\frac{y}{x}$ 代入，得到（1.15）的通积分

$$x=ce^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

例1. 求解

$$x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}.$$

解. 将方程化成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

令 $y=ux$，代入上式，得

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1+u^2},$$

或

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}.$$

积分可得

$$\ln|u+\sqrt{1+u^2}|=\ln|cx|.$$

即

$$u+\sqrt{1+u^2}=cx.$$

以$u=\frac{y}{x}$代回，得到

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2,$$

解出y，即得通解

$$y=\frac{c}{2}x^2-\frac{1}{2c}.$$

前面已经谈到，形如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right)$$

的方程是齐次方程．下面考虑稍为广泛一些的方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right). \tag{1.17}$$

我们要通过变量变换把 c 及c_1消去．

令 $x=\xi+\alpha,\ y=\eta+\beta,$ （α，β为待定常数）

代入（1.17），得到

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right).$$

今想把α与β如此选取，使得

$$\begin{cases}a\alpha+b\beta+c=0,\\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0.\end{cases} \tag{1.18}$$

但这和α与β的系数行列式有关．

如果

$$\triangle=\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\neq 0,$$

则（1.18）有唯一组解．把α．β就取为这一组解．于是，（1.17）就化成为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right).$$

求解这个方程，并利用变换

$$\xi=x-\alpha,\quad \eta=y-\beta$$

代回，即可得（1.17）的解．

上面的想法其实就是解析几何中的坐标平移．当$\triangle\neq 0$时，直线

$$ax+by+c=0$$

与

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

相交．将二式联立求得交点为（α，β），作坐标平移，把原点移到（α，β）．直线的斜率不变，截距变为0，方程变成

$$a\xi+b\eta=0$$

及

$$a_1\xi+b_1\eta=0.$$

但（1.17）能化为齐次方程的关键还在于，在变换

$$x=\xi+\alpha,\quad y=\eta+\beta$$

之下，其左端的导数$\frac{dy}{dx}$能变成$\frac{d\eta}{d\xi}$．左右两端相配合，（1.17）就变成为齐次方程了．

如果$\triangle=0$，则（1.18）未必有解．上法不可行．但是，这时有关系

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=k.$$

从而（1.17）可以化成

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(a_1x+b_1y)+c}{(a_1x+b_1y)+c_1}\right).$$

令$z=a_1x+b_1y$，则$y=\frac{1}{b_1}(z-a_1x)$代入上面的方程，即得关于z的新方程

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx}-a_1\right)=f\left(\frac{kz+c}{z+c_1}\right).$$

这还是一个变量可分离的方程，从而可以求解．

例2． 求解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

解． 因为

$$\triangle=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

方程组

$$\begin{cases}\alpha-\beta+1=0\\ \alpha+\beta-3=0\end{cases}$$

有解

$$\alpha=1,\quad \beta=2.$$

令

$$x=\xi+1,\quad y=\eta+2.$$

代入原方程，得到新方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}.$$

令$u=\eta/\xi$，代入上式，又得到新方程

$$u+\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{1-u}{1+u}.$$

整理后得到

$$\frac{(1+u)\,du}{u^2+2u-1}=-\frac{d\xi}{\xi}.$$

积分后得

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1|=-\ln|\xi|+\ln|c|,$$

即

$$\xi^2(u^2+2u-1)=c,$$

或

$$\eta^2+2\eta\xi-\xi^2=c.$$

以 $\xi=x-1$，$\eta=y-2$ 代回，即得原方程的通积分

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=c,$$

或

$$x^2-2xy-y^2+2x+6y=c.$$

可以看出，齐次方程的解法就是尽量利用变量变换，把它化成变量可分离的方程，从而使方程可积．这种思想是初等解法的一个基本思想．

习　　题 1.3

1．解下列方程：

1）$(x+2y)\,dx-x\,dy=0$　　2）$(y^2-2xy)\,dx+x^2\,dy=0$

3）$(x^2+y^2)\dfrac{dy}{dx}=2xy$　　4）$xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

5）$xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$　　6）$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$

2．解下列方程

1）$(2x-4y+6)\,dx+(x+y-3)\,dy=0$

2）$(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0$

3）$(x+4y)y'=2x+3y+5$

4）$y'=2\left(\dfrac{y-2}{x+y-1}\right)^2$

3．变量变换后化为齐次方程求解：

$(2x^2+3y^2-7)x\,dx-(3x^2+2y^2-8)y\,dy=0$

（变量变换：$x^2=u$，$y^2=v$）

4．一船从河边 A 点驶向对岸码头 O 点，设河宽 $OA=a$，水流速度为 w，船的速度为 v，如果船的方向总是朝码头 O 点前进，试求船的路线，并证明船能到达对岸 O 点的充要条件为 $v>w$．

§ 1.4 一阶线性方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x) \tag{1.19}$$

的方程称为**一阶线性方程**. 其所以称为线性的，是由于方程关于未知函数y及其导数$\frac{dy}{dx}$都是**一次**的. 以后我们总是在$p(x)$和$q(x)$都连续的区间上来进行讨论. 线性方程不论在实际应用上或者理论上都很重要. 它的解法和理论都比较系统完整.

在§1.1的例3中，我们得到过方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}+mg. \tag{1.3}$$

如果令$v=\frac{dx}{dt}$，(1.3)就变成为

$$m\frac{dv}{dt}=-kv+mg,$$

或

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v+g.$$

这就是关于v的一阶线性方程.

下面再看一个电学的例子.

例1. 设有图1.5的电路. 其中$E=E_0\sin\omega t$为交流电源的电动势；R为电阻器，当电流为I时，它产生的电压降为RI；L为电感一线圈，当电流的变化率为$\frac{dI}{dt}$时，它也产生电压降$L\frac{dI}{dt}$，L为一常数. 今设时刻$t=0$秒时，电路的电流为I_0，求电流I与时间的关系.

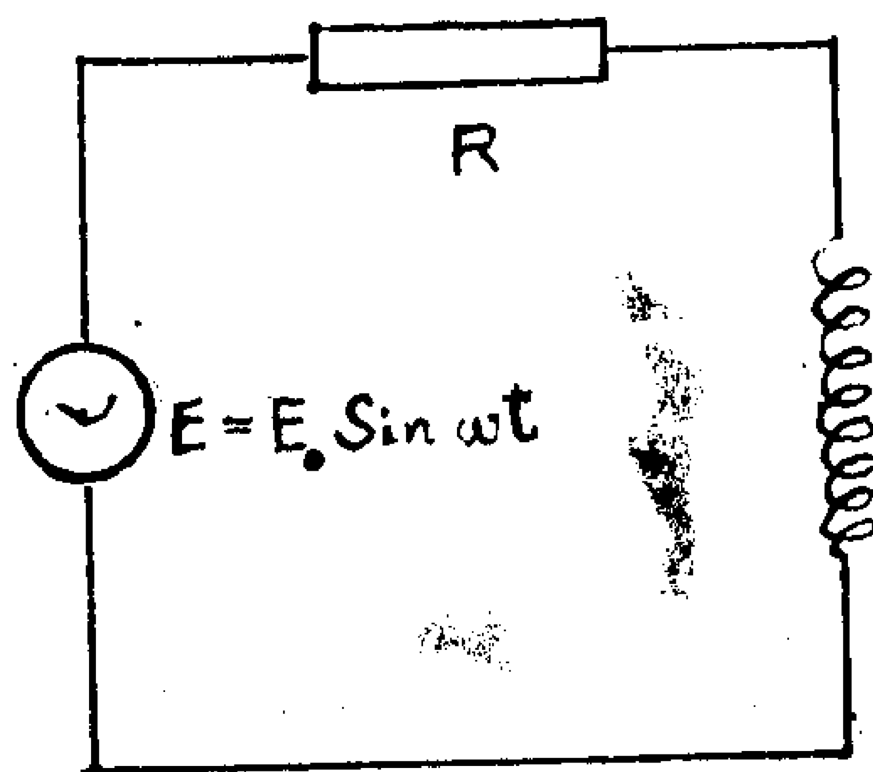


图 1.5

解. 根据基尔霍夫（*Kirchhoff*）定律，有如下的关系

$$E_0\sin\omega t=RI+L\frac{dI}{dt}.$$

整理后，得到关于I的线性方程式

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{R}{L}I+\frac{E_0}{L}\sin\omega t.$$

线性方程往往是非线性方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.5}$$

“线性化”的结果．假如$f(x,y)$在$y=0$邻域可以展开成为

$$f(x,y)=f(x,0)+f'_y(x,0)y+0(y^2),$$

而且在所研究的问题中，$0(y^2)$可以忽略不计，则（1.5）就可以用线性方程

$$\frac{dy}{dx}=f'_y(x,0)y+f(x,0) \tag{1.20}$$

来近似地加以研究．（1.20）称为（1.5）的“**一次近似**”方程．

下面来介绍线性方程的解法．

先考虑**线性齐次方程**

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y. \tag{1.21}$$

这里的“齐次”的含意与§1.3中的不同，这里是指（1.21）中每一项关于y和y'都是一次的，（1.21）不含“自由项”$q(x)$，即$q(x)\equiv 0$．（1.21）是一个变量可分离方程，易于求解．

显然，$y=0$是它的解．

当$y\neq 0$时，分离变量得

$$\frac{dy}{y}=p(x)dx.$$

积分后得

$$\ln|y|=\int p(x)dx+\ln|c|\quad(c\neq 0),$$

或

$$y=ce^{\int p(x)dx}\quad(c\neq 0).$$

但因为$y=0$为解，故不论c为任意常数，方程的通解为

$$y=ce^{\int p(x)dx}. \tag{1.22}$$

为了求（1.21）的满足初始条件

$$y(x_0)=y_0$$

的解，可在（1.22）中采用定积分，即

$$y=ce^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}.$$

以$x=x_0$，$y=y_0$代人，得$c=y_0$．于是所求解为

$$y=y_0e^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}. \tag{1.23}$$

下面再来求线性非齐次方程（1.19）的解．我们采用**常数变易法**．其基本思想是：当c为常数时，函数（1.22）的导数，**恰等于**该函数乘上$p(x)$，从而（1.22）为齐次方程（1.21）的解．现在要求非齐次方程（1.19）的解，这个解的导数**不能恰等于**它与

$p(x)$ 的乘积，还必须多出一项 $q(x)$ 来．为了达到这个目的，联系到乘积的导数的公式，我们将（1.22）中的常数 c 改为函数 $c(x)$，即令

$$y=c(x)\,e^{\int p(x)dx}. \tag{1.24}$$

为使（1.24）确为（1.19）的解，将它代入（1.9），应有恒等式

$$[c(x)e^{\int p(x)dx}]' \equiv p(x)c(x)e^{\int p(x)dx}+q(x).$$

化简后得

$$c'(x)e^{\int p(x)dx}\equiv q(x),$$

或

$$c'(x)\equiv q(x)e^{-\int p(x)dx},$$

积分后得

$$c(x)=\int p(x)e^{-\int p(x)dx}dx+c.$$

也就是说，为了使（1.24）为（1.19）的解，只须将 $c(x)$ 取为上式就可以了．把它代入（1.24），得到（1.19）的通解的一般形式

$$y=e^{\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+c\right)$$

或

$$y=ce^{\int p(x)dx}+e^{\int p(x)dx}\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx. \tag{1.25}$$

在求解具体方程时，不必记忆通解公式，可以按常数变易法来求解．

例2． 求解

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z+\frac{1}{2}x.$$

解． 先解齐次方程

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z,$$

通解为

$$z=cx^2.$$

用常数变易法，令非齐次方程通解为

$$z=c(x)x^2.$$

代入原方程，化简后可得

$$c'(x)=\frac{1}{2x}.$$

积分后得到

$$c(x)=\frac{1}{2}\ln|x|+c.$$

代回后即得原方程通解

$$z=x^2\left(-\frac{1}{2}\ln|x|+c\right).$$

我们仔细分析一下（1.25），即可发现它由两项组成．第一项是对应的齐次方程的通解，第二项是非齐次方程的一个特解（事实上，在（1.25）中令 $c=0$，即得此解）因此，我们有如下的结论：**非齐次方程式（1.19）的通解，等于它所对应的齐次方程（1.21）的通解与非齐次方程式（1.19）的一个特解之和．**

这是一个很重要的事实．回忆我们所熟知的线性代数方程组，也有这个结果．不仅如此，以后还可以看到，凡是**线性的**方程或方程组，都有这个结果．

为了求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

常数变易法可采用定积分形式，即将（1.24）改为

$$y=c(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}. \tag{1.26}$$

代入（1.19）并化简，得

$$c'(x)=q(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}.$$

两端积分，即得

$$c(x)=\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(\tau)d\tau}ds+c$$

代入（1.26），得到

$$y=e^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}\left(\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(\tau)d\tau}ds+c.\right)$$

以 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入，应有 $c=y_0$．于是所求初值问题的解为

$$y=e^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(\tau)d\tau}ds\right),$$

或

$$y=y_0e^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}+e^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(\tau)d\tau}ds, \tag{1.27}$$

$$y=y_0e^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x}^{s}p(\tau)d\tau}ds. \tag{1.28}$$

由于这个表达式中各式是完全确定的，因此可以断言，**线性方程式的初值问题的解是唯一确定的．**

下面回过头来解决例 1 的问题．即求解

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{R}{L}I + \dfrac{E_0}{L}\sin\omega t, \\ I(0) = I_0. \end{cases}$$

由（1.27），有

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \int_0^t e^{\frac{R}{L}s} \sin\omega s\, ds.$$

积分后得到

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right).$$

因为$R>0$，$L>0$，故当时间 t 充分大时，第一项趋于消逝，只剩下第二项．第二项经化简后，成为

$$\tilde{I} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi),$$

其中$\varphi = \arcsin\dfrac{\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$.

下面来求解形如

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \tag{1.29}$$

的方程．它称为贝努利（Bernoulli）方程（因为它是由 *James Bernoulli* 在1695年提出的）．它易于化成线性方程来求解．

将方程两端除以 y^n，得到

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = p(x)y^{1-n} + q(x).$$

令 $y^{1-n} = z$，有

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}.$$

代入上式，得到

$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dz}{dx} = p(x)z + q(x),$$

即

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)p(x)z + (1-n)q(x).$$

这是一个线性方程式，当然是可以求解的．求出 z 之后再用 y 代回．即得贝努利方程的解．

习　　题 1.4

1．解下列方程

1）$\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$　　　2）$y' - \dfrac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$

3） $\frac{d\rho}{d\theta}+3\rho=2$　　4） $\frac{di}{dt}-6i=10\sin 2t$

5） $xy'-2y=2x^4$　　6） $x(y'-y)=e^x$

7） $y'+y\operatorname{tg}x=\sec x$　　8） $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$

2． 求曲线，使其切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标．

3． 解下列贝努利方程

1） $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$　　2） $y'+2xy+xy^4=0$

3） $y'+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$　　4） $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$

5） $xdy-\{y+xy^3(1+\ln x)\}dx=0$

4． 求方程

$$\frac{dx}{dt}+x=f(t)$$

的通解，并说明当 $|f(t)|\leqslant M$，$t\in(-\infty, +\infty)$ 时，方程有一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界的解．

5． 设 $f(x)$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$（b 是常数），求证当常数 $a>0$ 时，方程

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x) \qquad (*)$$

的一切解 $y(x)$，有 $\lim_{x\to+\infty}y(x)=\frac{b}{a}$；当 $a<0$ 时，方程(＊)有且仅有一个解有此性质．

6． 设有连续函数 $p(x)$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上满足：$\lim_{x\to+\infty}p(x)=a>0$，$|f(x)|<b$（$a$，$b$ 为常数）．求证方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

的一切解在 $[0, +\infty)$ 上有界．

7． 在6题中，如果 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，试证方程的任一解都有 $\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$．

8． 在6题中，如果 $\lim_{x\to+\infty}p(x)=a<0$，试证方程有且仅有一个解有界．

9． 证明，如果 $y(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx}=p(x)\sin y$$

的满足条件 $y(0)=0$ 的解，则 $y(x)\equiv 0$，其中 $p(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续．

10．设 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可微，且

$$\lim_{x\to+\infty}[y'(x)+y(x)]=0.$$

试证 $\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$．

11．设在方程

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{*}$$

中函数 $p(x)$，$q(x)$ 连续且有关系式

$$q(x)=kp(x) \quad （k \text{ 为常数}）.$$

试证 $y=k$ 是特解，方程（*）的通解为

$$y=k+ce^{-\int p(x)dx}.$$

§1.5 全微分方程及积分因子

前面几节的求解方法都是以分离变量方程为基础的．这一节要讲一种与此不同的新的方法．

考虑微分形式的一阶方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{1.6}$$

例如

$$xdx+ydy=0,$$

$$xydx+\frac{1}{2}(x^2+y)dy=0,$$

$$\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

等等．

先看看方程

$$xdx+ydy=0.$$

易于看到，它的左端是函数$\frac{x^2+y^2}{2}$的微分．从而方程可写成

$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=0.$$

若 $y=y(x)$ 为这方程的解，应有恒等式

$$d\left(\frac{x^2+y^2(x)}{2}\right)\equiv 0.$$

从而

$$x^2+y^2(x)\equiv c.$$

这就是未知函数 y 与 x 的关系．由此可解出 y 来，即

$$y=\pm\sqrt{c-x^2}.$$

这个解法当然与变量分离法很不相同，其关键是把左端化成一个二元函数的全微分．下面，我们把它推广到一般．

1°．如果方程（1.6）的左端恰为某二元函数 $U(x,y)$ 的全微分，即

$$dU(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy, \tag{1.30}$$

则称（1.6）是**全微分方程式**或**恰当方程**，函数$U(x,y)$称为（1.6）或（1.30）的**原函数**.

全微分方程的解法可表述为如下的定理。

定理1.1 假如$U(x,y)$是微分（1.30）的一个原函数，则全微分方程（1.6）的通积分为

$$U(x,y)=c, \tag{1.31}$$

其中c为任意常数.

证明. 先证（1.6）的任一解$y=y(x)$均满足方程(1.31). 因为$y=y(x)$为（1.6）的解，故有恒等式

$$M(x,y(x))dx+N(x,y(x))dy(x)\equiv 0.$$

因为$U(x,y)$为（1.30）的原函数，所以

$$dU(x,y(x))\equiv 0,$$

及

$$U(x,y(x))\equiv c. \qquad (c\text{ 为一常数})$$

于是$y=y(x)$满足（1.31）.

再证由（1.31）所确定的任意隐函数$y=y(x)$均为（1.6）的解. 因为$y=y(x)$是由（1.31）所确定的隐函数，所以存在常数c，使

$$U(x,y(x))\equiv c.$$

将上式微分并应用$U(x,y)$是（1.30）的原函数的性质，即有

$$dU(x,y(x))=M(x,y(x))dx+N(x,y(x))dy(x)\equiv 0.$$

从而$y(x)$是方程（1.6）的解.

有了上述定理，为了求解全微分方程（1.6），只须求出它的一个原函数就可以了.

我们在前面讨论过方程

$$xdx+ydy=0.$$

因为 $xdx+ydy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$，故$\frac{x^2+y^2}{2}$是方程的一个原函数，从而方程的通积分是

$$\frac{x^2+y^2}{2}=c_1,$$

或

$$x^2+y^2=c.$$

例1. 求解

$$x\,dx+\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=0.$$

解. 仔细分析左端，有如下的关系.

$$x\,dx+\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=x\,dx+\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

$$= d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) + d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$$

$$= d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right).$$

从而左端是一个全微分，原函数为

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

于是原方程的通积分即为

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = c_1,$$

或

$$x^2 + \ln(x^2+y^2) + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = c.$$

从上面两例中看到，在比较简单的情况下，为了判断方程（1.6)是否全微分方程，只须考察它的左端是否可以化为某一原函数的全微分．为此，我们必须熟悉一些常见的初等函数的全微分，并在此基础上掌握一定的技巧．但是，对于一般的方程（1.6），如何判断它是否为全微分方程呢？下面提出一个较普遍的定理．

定理1.2　假如$M(x,y)$ 及 $N(x,y)$ 在矩形

$$R:\ |x-x_0|\leqslant a,\ \ |y-y_0|\leqslant b$$

上连续可微，则方程（1.6）在R上为全微分方程的充分而且必要条件为在R上有

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.32}$$

证明．先证必要性．设（1.6）为全微分方程，所以存在原函数$U(x,y)$，使得

$$dU = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy,$$

即

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y). \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y).$$

因为M及N均为连续可微，故$U(x,y)$ 的二阶偏导数连续．由数学分析关于混合偏导数的定理可知

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

必要性得证．

再证充分性．即假设（1.32）成立，往证（1.6）是全微分方程．为此，只须找到一个二元函数$U(x,y)$，使得它恰为（1.6）的原函数．

易于看出，函数

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dy + \varphi(y)$$

满足

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y).$$

下面选取 $\varphi(y)$，使得 $U(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y),$$

即

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x,y).$$

由参变量积分的性质和条件（1.32），上式即为

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y),$$

或

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y).$$

即

$$\varphi'(y)=N(x_0,y).$$

积分后得到

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+c_1.$$

因为只要一个 $\varphi(y)$ 就够了，取 $c_1=0$．于是，函数

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy \tag{1.33}$$

为（1.6）的原函数．既然（1.6）存在原函数，它当然就是全微分方程了．于是定理得证．

这个定理不仅提供了全微分方程的判别法，而且提供了求原函数的具体方法，即（1.33）．同时，方程的通积分也就得到了，即

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=c. \tag{1.34}$$

为了求全微分方程（1.6）满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，以 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入（1.34），可定出 $c=0$．因此，（1.6）满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的积分即为

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=0. \tag{1.35}$$

由隐函数定理可知，当 $N(x,y)\neq 0$ 时，由（1.35）所确定的满足 $y(x_0)=y_0$ 的隐函数是唯一的．从而（1.6）的满足 $y(x_0)=y_0$ 的解也就是唯一的了．

例2．求解方程

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$$

解．首先检验有

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

所以这方程是全微分方程．$M(x,y)$ 及 $N(x,y)$ 在整个 xoy 平面都连续可微．不妨

选取$x_0=0$，$y_0=0$（不一定非这么选不可，这么选只是为了简单）故方程通积分为

$$\int_0^x (3x^2+6xy^2)\,dx+\int_0^y 4y^3\,dy=c,$$

即

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c.$$

例3. 求解初值问题

$$\begin{cases} xy\,dx+\dfrac{1}{2}(x^2+y)\,dy=0, \\ y(0)=2. \end{cases}$$

解. 因为

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x=\frac{\partial N}{\partial x},$$

故方程为全微分方程，故所求初值问题的积分为

$$\int_0^x xy\,dx+\frac{1}{2}\int_2^y y\,dy=0,$$

即

$$\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{4}(y^2-4)=0,$$

或

$$2x^2y+y^2-4=0.$$

解出y，得到所求解为

$$y=-x^2+\sqrt{x^2+4}.$$

2°. 以上讲了全微分方程的求解方法. 但是，方程（1.6）未必都是全微分方程. 当方程（1.6）不为全微分方程时，在一定条件下，我们可以把它化为全微分方程.

假如存在这样的函数$\mu(x,y)\neq 0$，使方程

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx+\mu(x,y)N(x,y)\,dy=0 \tag{1.36}$$

是全微分方程，我们把$\mu(x,y)$称为方程（1.6）的一个**积分因子**.

易于看到，**当$\mu(x,y)\neq 0$时，方程(1.6)与（1.36）是同解的**. 于是，为了求解（1.6），只须求解（1.36）就可以了，但是，如何求得积分因子$\mu(x,y)$呢？下面就来研究求积分因子$\mu(x,y)$的方法.

方程（1.36）为全微分方程的充要条件为

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

展开并整理后，上式化成

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot\mu,$$

或

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.37}$$

于是，为了求得 $\mu(x,y)$，必须求解（1.37）．

但是，一般地说，（1.37）是不易求解的．不过，对于某些特殊情况，（1.37）的求解问题也还是比较容易的．

我们看看（1.37）的左端．假如方程（1.6）存在这样的积分因子，它只与 x 或 y 中某一个有关，即存在积分因子 $\mu(x)$ 或 $\mu(y)$，这时，左端只会保留一项，方程就将大大化简．

为明确计，先设方程（1.6）存在积分因子 $\mu(x)$，则方程（1.37）化成

$$N\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x},$$

或

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

既然 $\mu(x)$ 只与 x 有关，而上式成立，故右端

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{1.38}$$

也必只与 x 有关（即不含 y）．

这样，我们就得到了（1.6）存在只与 x 有关（不含 y）的积分因子的必要条件（1.38）．下面指出，这个条件也是充分的．

设（1.38）只与 x 有关（即不含 y），且 $\mu(x)$ 为方程

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

的解．易于看出，$\mu(x)$ 即为（1.37）的一个解．从而 $\mu(x)$ 为（1.6）的一个积分因子．

上述分析，总结起来就是这样一个**结论**：当（1.6）给定后，假如（1.38）与 y 无关，则（1.6）存在与 y 无关的积分因子 $\mu(x)$，且可由求解方程

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

得到．

同理可证，当表达式

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

与 x 无关时，方程（1.6）存在与 x 无关的积分因子 $\mu(y)$，且可由求解方程

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}$$

得到.

例4. 求解

$$\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

解. 因为

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=1$$

与y无关，故原方程存在只含x的积分因子．求解方程

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=1,$$

得到

$$\ln\mu=x,\ \mu(x)=e^x.$$

于是方程

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x(x^2+y^2)dy=0$$

为全微分方程．且$e^x\neq 0$，故这方程与原方程同解．

取$x_0=0$，$y_0=0$，于是通积分为

$$\int_0^x e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\int_0^y y^2dy=c,$$

即

$$ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=c.$$

3°．全微分方程有很具体的物理背景．设在xoy平面上有一力场

$$\vec{F}=M(x,y)\vec{i}+N(x,y)\vec{j}.$$

现在求这样的曲线l，它与力场处处垂直．即处处有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

或

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{1.6}$$

于是，问题化为求解方程（1.6）．

设力场**存在位势函数 V(x,y)**，从而有

$$\frac{\partial V}{\partial x}=M(x,y),\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=N(x,y).$$

于是（1.6）为全微分方程，它的通积分为

$$V(x,y)=c.$$

由这式所确定的曲线是力场的**等位线**．沿等位线力场不作功，当然必须处处与力场垂直了．

习　　题 1.5

1. 解下列方程

1）$2xydx+(x^2-y^2)dy=0$

2）$e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$

3）$2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$

4）$\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$

5）$\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$

6）$(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x\,dy=0$

2. 求下列方程的积分因子和积分：

1）$(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$

2）$(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$

3）$(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$

4）$(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)dx+2(y^3+x^2y+x)dy=0$

3. 求下列方程的积分因子：

1）$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$，这里$p(x)$，$f(x)$是连续函数.

2）方程$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0$

4. 设$f_1(z)$，$f_2(z)$连续可微，$\varphi(x,y)=[f_1(xy)-f_2(xy)]xy\neq 0$，求证$\frac{1}{\varphi(x,y)}$是方程

$$f_1(xy)ydx+f_2(xy)xdy=0$$

的一个积分因子。

5. 求下列方程的积分因子：

1）贝努利方程$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)y^n$（$n\neq 0$，1）

2）可分离变量方程$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$

6. 设$f(x,y)$及$\frac{\partial f}{\partial y}$连续，试证方程

$$dy-f(x,y)dx=0$$

为线性方程的充要条件是它有仅依赖于x的积分因子.

§1.6 方向场·欧拉折线

在前面几节里，我们介绍了一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.5}$$

的一些可积类型．但是，并不是任何一阶方程都是可积的．例如，法国数学家**刘维尔**（*Liouville*）在1841证明了，即使是形式上很简单的**黎卡提**（*Riccati*）**方程**

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x),$$

也一般地不能用初等积分法求出其通解．可以说，可积的一阶方程为数是"很少的"．但是实际中又迫切要求微分方程的解．于是人们就开始研究一些近似解法．特别是，实际中提出的求解问题一般并不要求通解，往往是求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{1.9}$$

的解．因此，初值问题的近似解法就显得特别重要．这一节我们要简略地介绍一下很直观的**欧拉**（**Euler**）**折线法**．在此之前，先引入由(1.5)所确定的**方向场**的概念，它在近似计算及理论上都有很重要的意义．

1°．**方向场**

设（1.5）的右端函数 $f(x,y)$ 在区域G内有定义（图1.6），即对G内任意一点(x,y)，都存在确定的值 $f(x,y)$．以点 (x,y) 为始点，作一单位线段，使其斜率恰为$k=f(x,y)$，并设这线段与 ox 轴正向的夹角为锐角．于是，在G内每一点都配置了一个有确定的方向的单位直线段．我们说，方程（1.5）在区域G上确定了一个方向场．

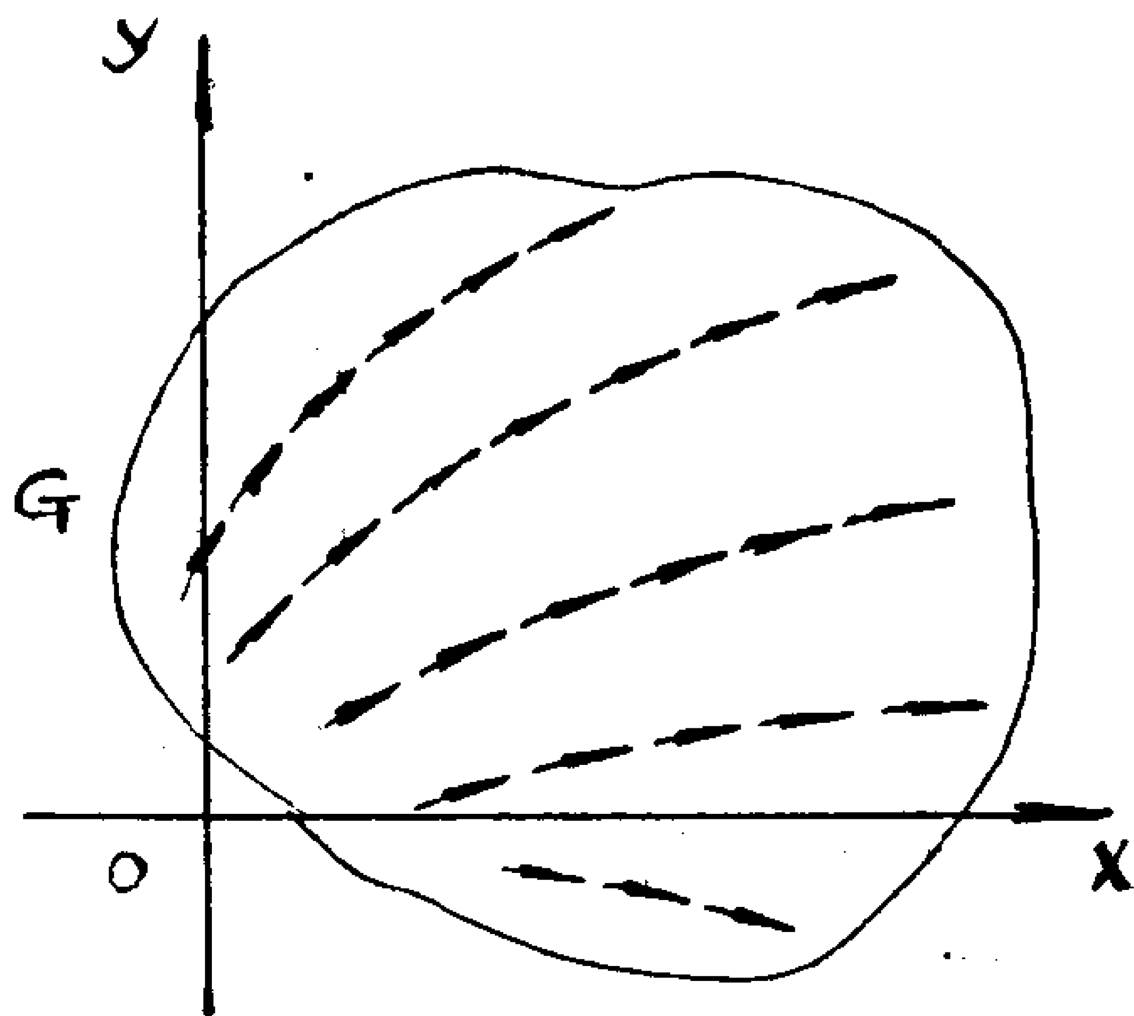


图 1.6

例1． 试讨论方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

所确定的方向场．

解．右端函数在除 oy 轴以外的左右两个半平面上处处有定义，因而方程在这两个半平面上都确定了方向场．易于看出这个方向场在点 (x,y) 的方向，当 $x>0$ 时，就是由原点 (o,o) 到点 (x,y) 的射线的方向；当 $x<0$ 时，就是由点 (x,y) 到原点 (o,o) 的直线的方向（图1.7）．

例2． 考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

所确定的方向场.

解. 右端函数在除了 ox 轴以外的上下两个半平面上都有定义.方程在每一点(x,y)所确定的方向都与原点到该点的射线垂直，这是很容易看到的（图1.8）.

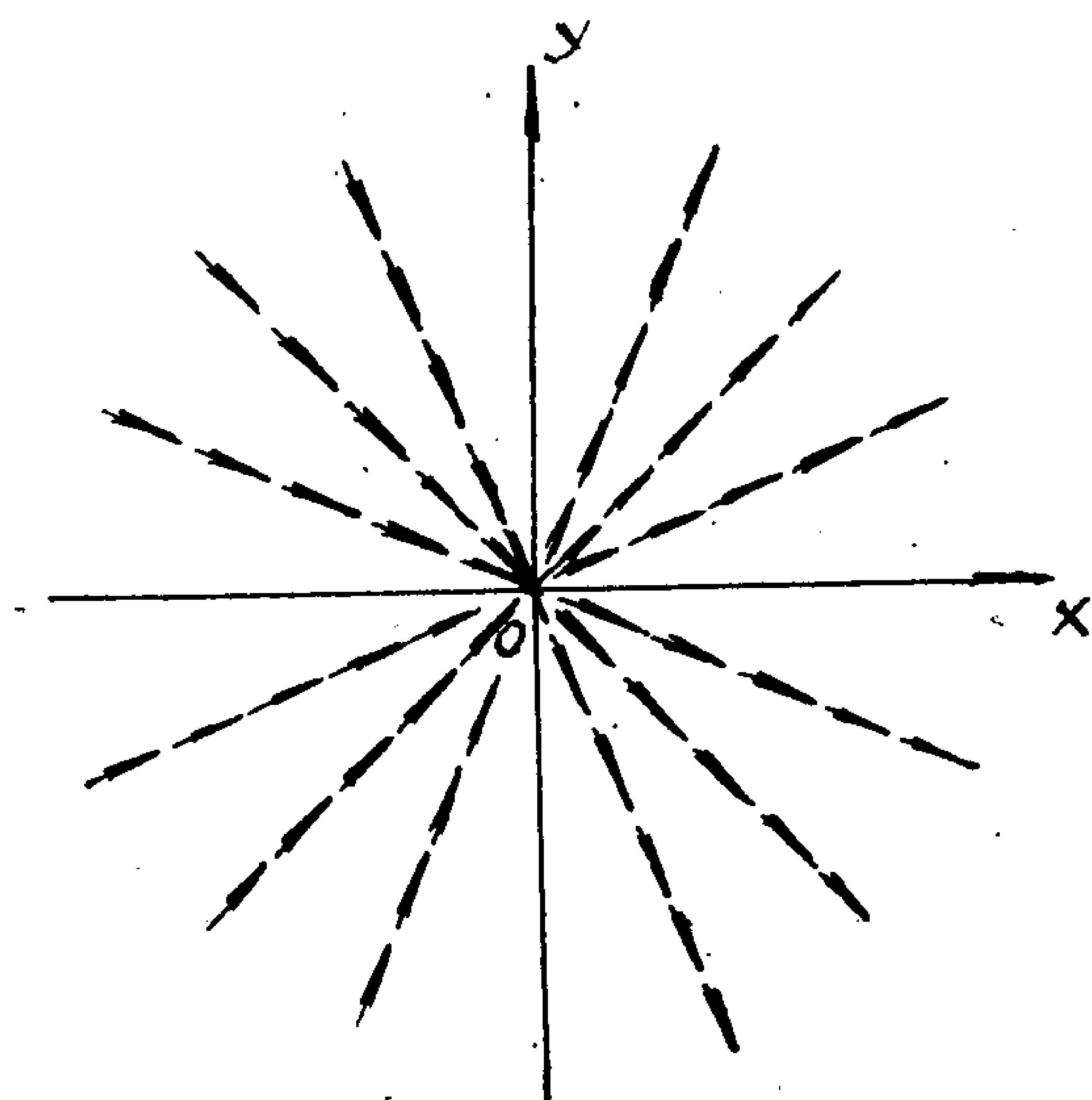


图 1.7

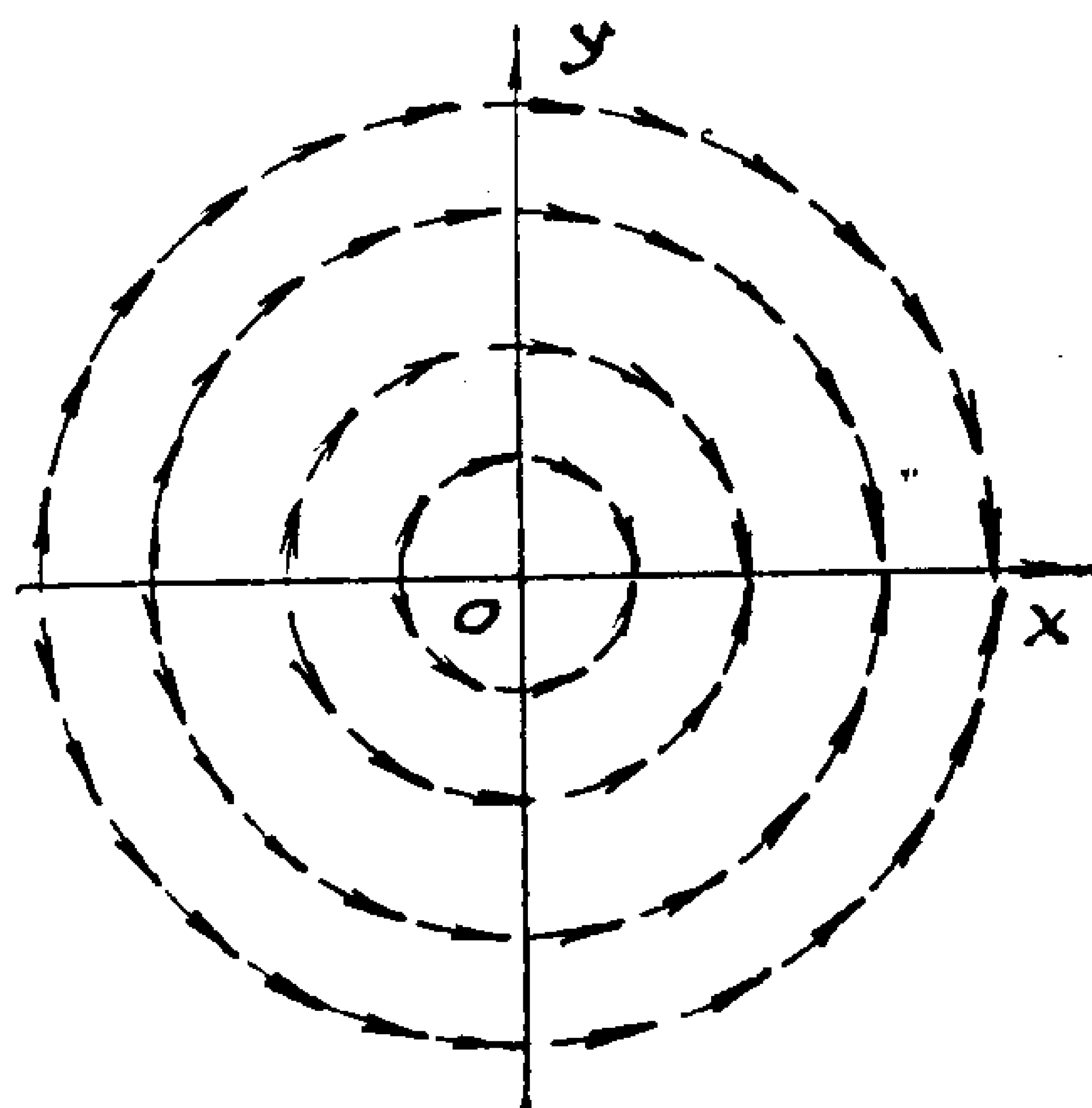


图 1.8

在例 1 中，右端函数 y/x 在 y 轴上无定义（变为无限）. 在例 2 中，右端函数 $=\left(-\frac{x}{y}\right)$在 x 轴上无定义（变为无限）. 为了进行弥补，一般的，当方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.5}$$

的右端函数 $f(x,y)$ 在某些点取得无限值时，我们同时考虑方程

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}=f_1(x,y). \tag{1.5$'$}$$

易见，在 $f(x,y)$ 取无限值的点，$f_1(x,y)=0$. 于是，可以说方向场在这些点的方向平行于 oy 轴.

例如，在例 1 中，同时考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \qquad 及 \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}.$$

在例 2 中，同时考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \qquad 及 \qquad \frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}.$$

这样，这两个方程都在全平面上确定了方向场.

这种方法是在研究方向场时经常采用的，但是，在讨论方程（1.5）的解时，由于已经认定了 x 为自变量，y 为未知函数，为了不使初学者引起概念上的紊乱，我们不考虑方程（1.5）$'$，只考虑方程（1.5）所确定的方向场.

下面来讨论方程（1.5）的解与它所确定的方向场的关系．前面，我们已经把(1.5)的解 $y=\varphi(x)$ 的图象称为（1.5）的积分曲线．现在有如下定理．

定理1.3．曲线 L 为（1.5）的积分曲线的充要条件为：在 L 上任一点，L 的切线方向与（1.5）所确定的方向场在该点的方向一致．

证明．必要性．设 L 为（1.5）的积分曲线，且其方程为 $y=\varphi(x)$，则函数 $y=\varphi(x)$ 为（1.5）的一个解．于是，在其有定义的区间上有

$$\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)).$$

上式左端为 L 在点 $(x,\varphi(x))$ 的切线的斜率，右端则恰为方程（1.5）的方向场在同一点 $(x,\varphi(x))$ 的方向的斜率．从而，L 在点 $(x,\varphi(x))$ 的切线方向与方向场在该点的方向一致．又因上式为恒等式，这就说明沿着整个 L，这两个方向都一致．

充分性．设方程为 $y=\varphi(x)$ 的曲线 L，在其上任一点 $(x,\varphi(x))$，它的切线方向都与(1.5)的方向场的方向一致，则这两个方向的斜率应当相等．于是，在 $y=\varphi(x)$ 有定义的区间上，有恒等式

$$\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)).$$

这个等式恰巧说明 $y=\varphi(x)$ 为方程（1.5）的解．从而 L 是积分曲线．

这个定理表明了这样一个事实：（1.5）的积分曲线在其上每一点都与方向场的方向相切．或者直观地说成积分曲线是始终"顺着"方向场的方向行进的曲线．这个事实对于求解方程（1.5）以及研究解的性态是极为重要的．因为，当方程（1.5）不可求积时，就可以根据方向场的走向来求近似的积分曲线．同时，还可以根根方向场本身的性质，来研究解的性质，而不必事先求出方程的解来．这正是近似解法和定性理论的基本思想．

例3．考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

的积分曲线的大概形状

解．这个方程是不可积的．但是易于画出它的方向场来（图1.9）．在同一以原点为中心的圆周上，方向场的方向都相同．其斜率为半径 R 的平方．于是，半径越大，方向场的方向越陡．从而可以根据方向场方向的趋势，大体上描出积分曲线来．

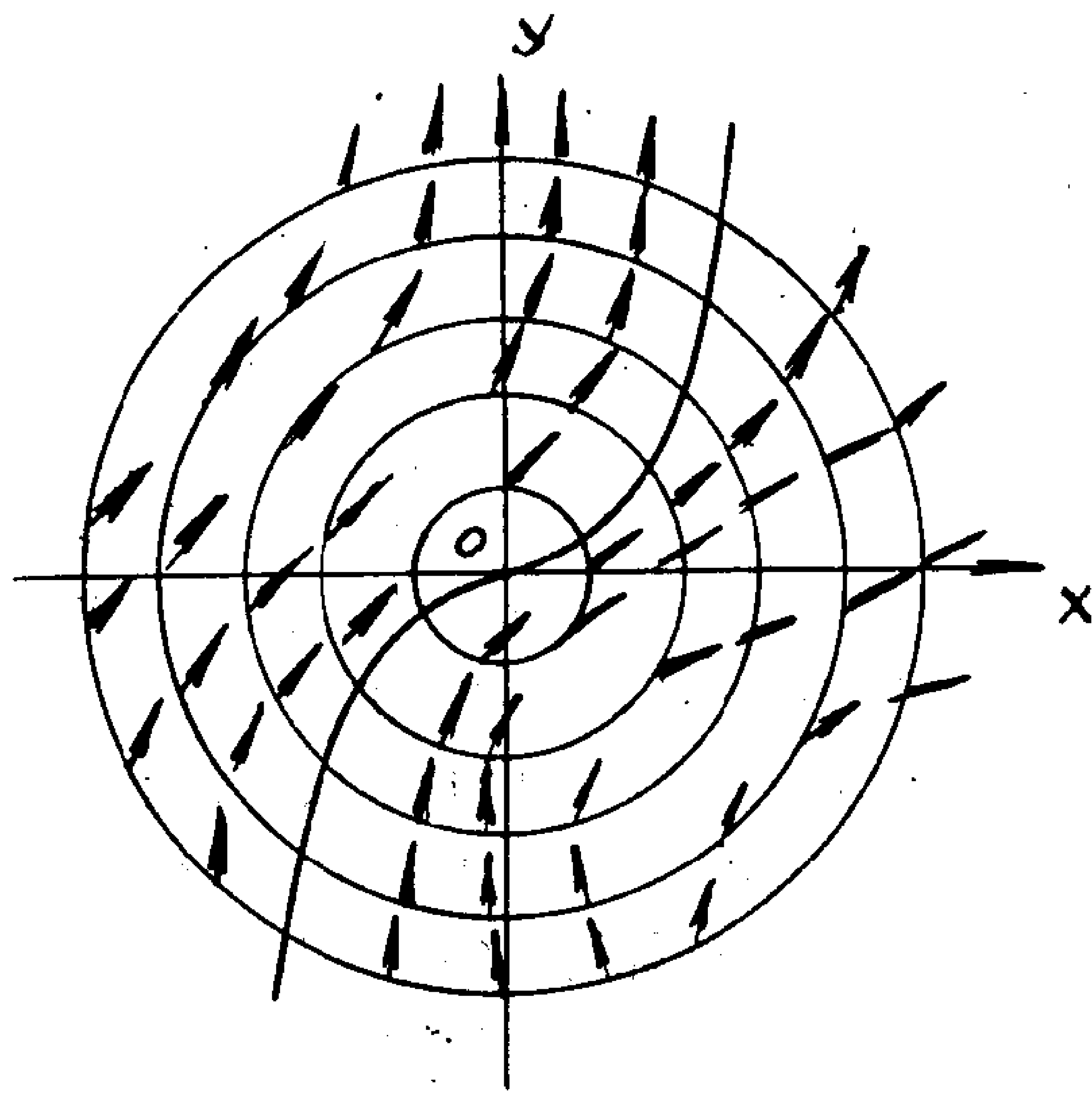


图 1.9

例如经过 (o,o) 的积分曲线．因为切线斜率非负，故为上升曲线．从而在第一和第三象限．为了进一步探讨它的性质，还可以利用 y''，即求出

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=2x+2y\frac{dy}{dx}=2x+2(x^2+y^2)y.$$

易于看出，在第一象限中 $y''>0$，，从而曲线凹向上；在第三象限中 $y''<0$，，曲线凹向下．它大致如图 1.9 所示．

2°．欧拉折线

在这一段里我们利用方向场的概念简略地介绍一种简单的求初值解的近似方法，即**欧拉折线法**．

为了求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{1.9}$$

在区间〔x_0，b〕上的近似解 $y=y(x)$，就是要在由 $f(x,y)$ 所确定的方向场中，求出经过点 (x_0,y_0) 的近似积分曲线．

为此，把区间〔x_0，b〕n 等分，其分点为：

$$x_k=x_0+kh$$
$$(k=0,1,2,\cdots,n),$$
$$h=\frac{b-x_0}{n},$$
$$x_n=b.$$

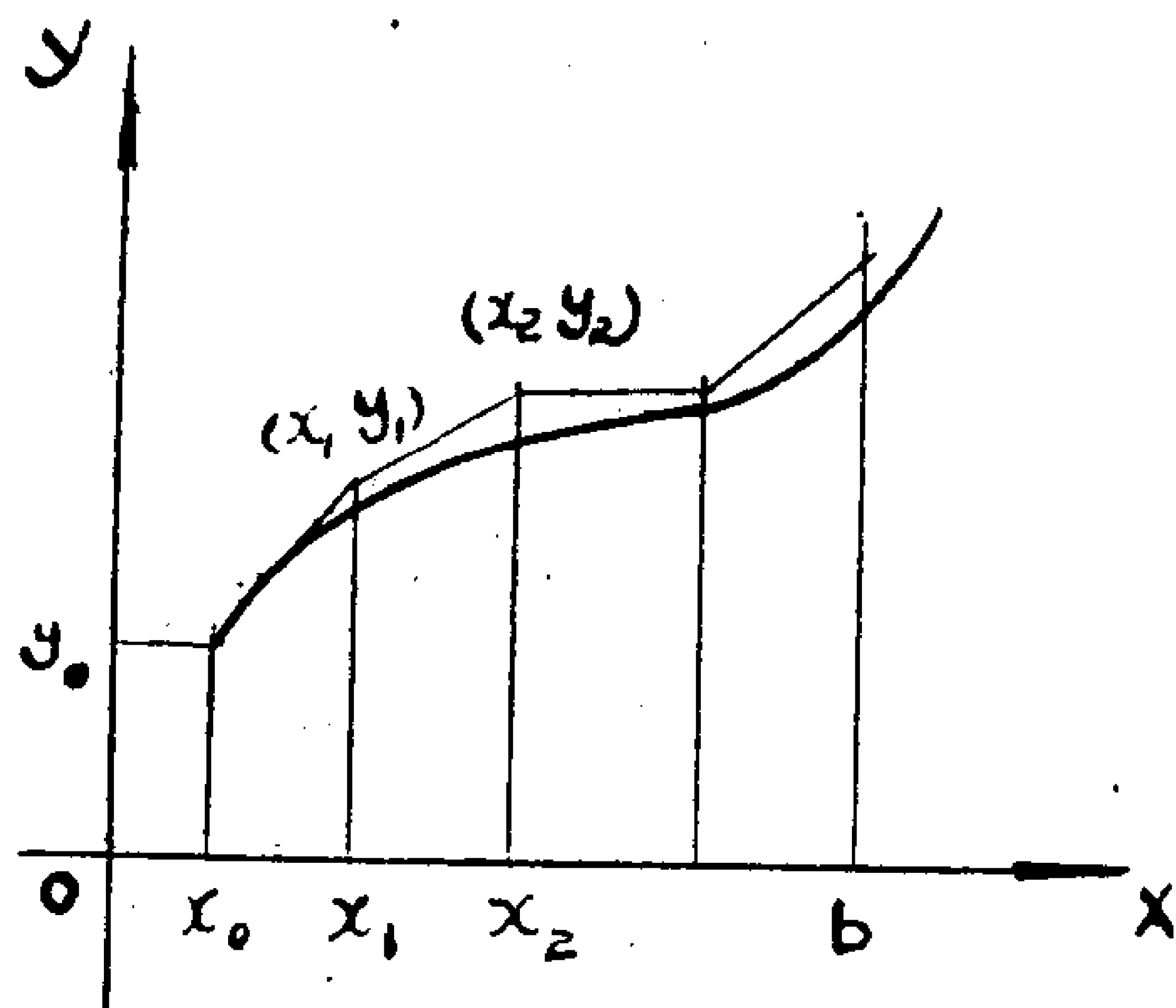


图 1.10

先求出 $f(x_0,y_0)$．因为积分曲线在 (x_0,y_0) 的斜率应为 $f(x_0,y_0)$，于是用过 (x_0,y_0) 而斜率为 $f(x_0,y_0)$ 的直线段来近似积分曲线．其方程为

$$y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0).$$

求出直线上横坐标为 x_1 的点的纵坐标为：

$$y_1=y_0+f(x_0,y_0)(x_1-x_0),$$
$$=y_0+f(x_0,y_0)h.$$

如果 h 很小，则 $y_1\approx y(x_1)$，从而点 (x_1,y_1) 很接近原积分曲线上的点 $(x_1,y(x_1))$．如果 $f(x,y)$ 连续，则 $f(x_1,y_1)$ 就近似于 $f(x_1,y(x_1))$．于是，由 (x_1,y_1) 出发的以 $f(x_1,y_1)$ 为斜率的直线段，又近似于原积分曲线．它的方程为

$$y=y_1+f(x_1,y_1)(x-x_1).$$

求出这直线上的横坐标为 x_2 的纵坐标 y_2：

$$y_2=y_1+f(x_1,y_1)h.$$

如此类推，可以求出 (1.9) 的解在各分点的近似值

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1},y_{k-1})h$$
$$(k=1,2,\cdots,n).$$

由于各近似直线段的方程为已知，所以对〔x_0，b〕上任一点 x，都可以求得解 $y=y(x)$ 的近似值．

这样求得的积分曲线的近似折线，称为**欧拉折线**.

上面只讲了〔x_0, b〕上的做法，对于〔a, x_0〕上的情况，可以类似地加以解决.

用欧拉折线求近似解的方法虽然比较粗糙一些，但还是比较简单适用的. 特别是在理论上有很大的意义. 可以证明：当n无限增大，而$h\to 0$时，欧拉折线趋近于方程的积分曲线. 这个结果我们不给证明了. 请读者参看王柔怀、伍卓群编《常微分方程讲义》第五章§2.

习　　题 1.6

1． 试绘出下列各方程的积分曲线图：

1）$y'=a$（a为常数）　　2）$y'=x^2$

3）$y'=|y|$　　4）$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$

5）$\frac{dy}{dx}=|x|$

2． 绘出方程

$$y'^2-2xy'=0$$

的积分曲线图，试讨论过xy平面上每点都有几条积分曲线？

3． 绘出方程

$$y'^2+(y^2-1)y'-y^2=0$$

的积分曲线图，试讨论过xy平面上每一点都有几条积分曲线？

4． 求下列方程的通解和奇解

1）$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=r^2$　　2）$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$

§1.7 初值问题解的存在与唯一性定理·奇解·包络

1．初值问题解的存在与唯一性定理.

前一段介绍了初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{1.9}$$

的欧拉折线近似解法.但是有一个问题还必须先弄清楚,就是初值问题的解是否存在呢？如果（1.9)的解根本不存在，近似解法当然就是没有意义的. 譬如§1.6的例1和例2，由于右端函数在（0,0）都没有意义，因此方程就谈不上有满足初始条件

$$y(0)=0$$

的解的问题了.

另外，我们在前面也看到，即使初值问题的解存在，也还可能不唯一，这个情况在

前几节已见到过了．在这种情况下，解的近似解法当然仍然还是没有意义的．所以要谈解的近似解法，首先就必必解决初值问题解的存在性与唯一性问题．另外，这个问题也还有更为根本的理论意义，可以说，它是整个常微分方程理论与方法的基础．

我们自然会问：在什么条件下，才能保证初值问题解的存在性和唯一性呢？下面我们先介绍两个定理，第一个本书不给证明，后者的证明留待第三章去解决．

定理1.4．（**皮亚诺** *Peano* **定理**）假如 $f(x,y)$ 在区域 G 上连续，$(x_0,y_0)\in G$，则在 x_0 的邻域上存在初值问题（1.9）的解（参看王柔怀，伍卓群编《常微分方程讲义》第五章）．

定理1.5．（存在与唯一性定理）假如函数 $f(x,y)$ 在区域 G 上连续，偏导数 $f'_y(x,y)$ 在 G 上有界（或连续），则对任意 $(x_0,y_0)\in G$，在 x_0 的邻域上，初值问题（1.9）的解存在且唯一．

例如，方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

的右端函数在整个 xoy 平面上都满足定理 1.5 的条件．所以对 xoy 平面上任意点，(x_0,y_0)，方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解存在且唯一．

又如方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2},$$

$f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$，$f'_y(x,y)=\dfrac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$．于是方程在带形区域 $|y|<1$ 内满足存在与唯一性定理．

2°．奇解．

先看下面的例子．

例1． 试讨论初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}}\\ y(x_0)=0 \quad (x_0\text{为任意实数})\end{cases}$$

的唯一性．

解． 首先看到，$y=0$ 为方程的解．它当然满足条件 $y(x_0)=0$．

另外，易于求得方程的通解为

$$y=(x+c)^3.$$

以 $y(x_0)=0$ 代入，可求得 $c=-x_0$，故解

$$y=(x-x_0)^3$$

也满足初始条件 $y(x_0)=0$．

于是，在 ox 轴上任一点 $(x_0,0)$，均有两条积分曲线经过，从而破坏了解的唯一性．请注意 ox 轴恰为积分曲线，所以积分曲线 $y=0$ 上每点都破坏了解的唯一性（图1.11）

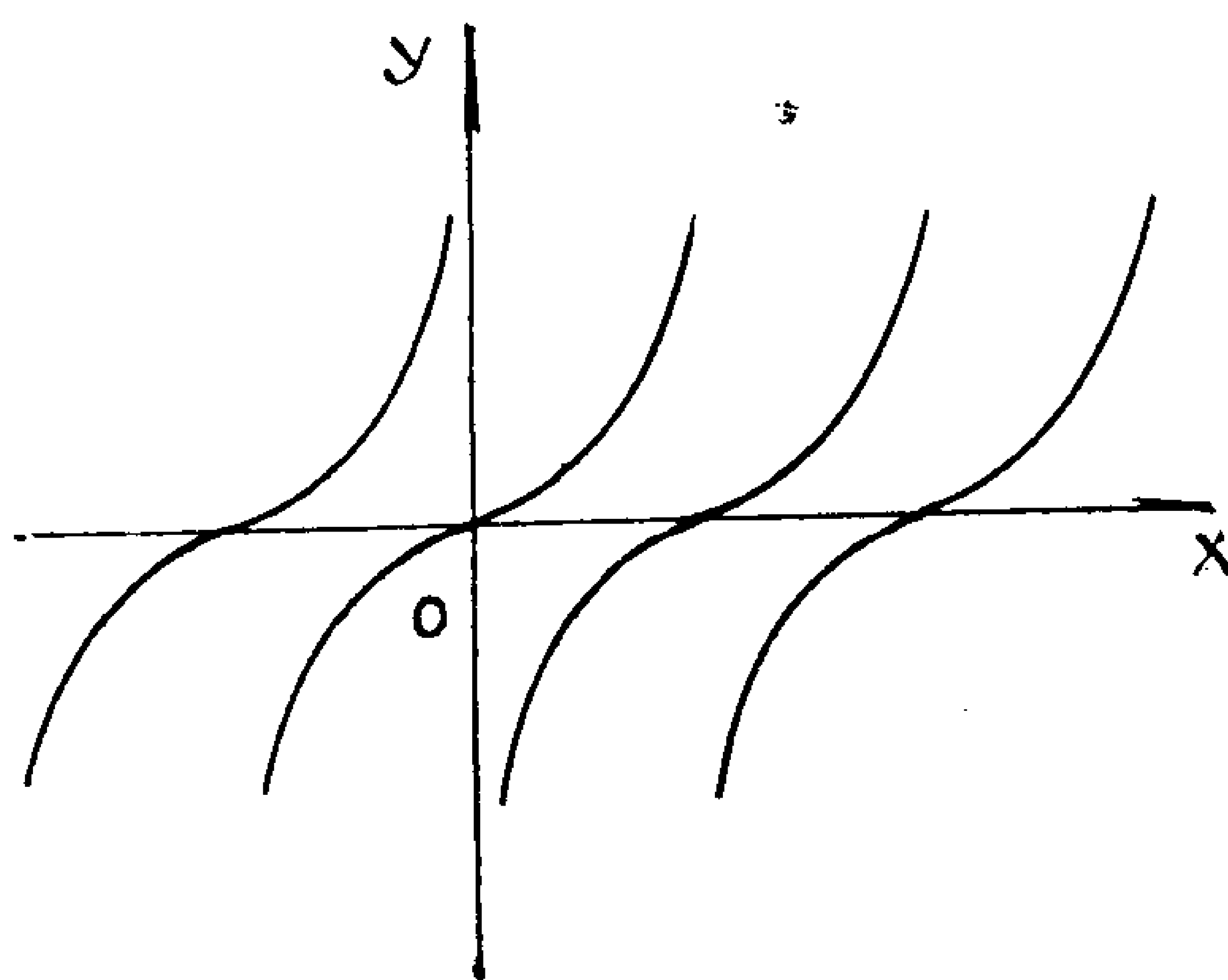


图 1.11

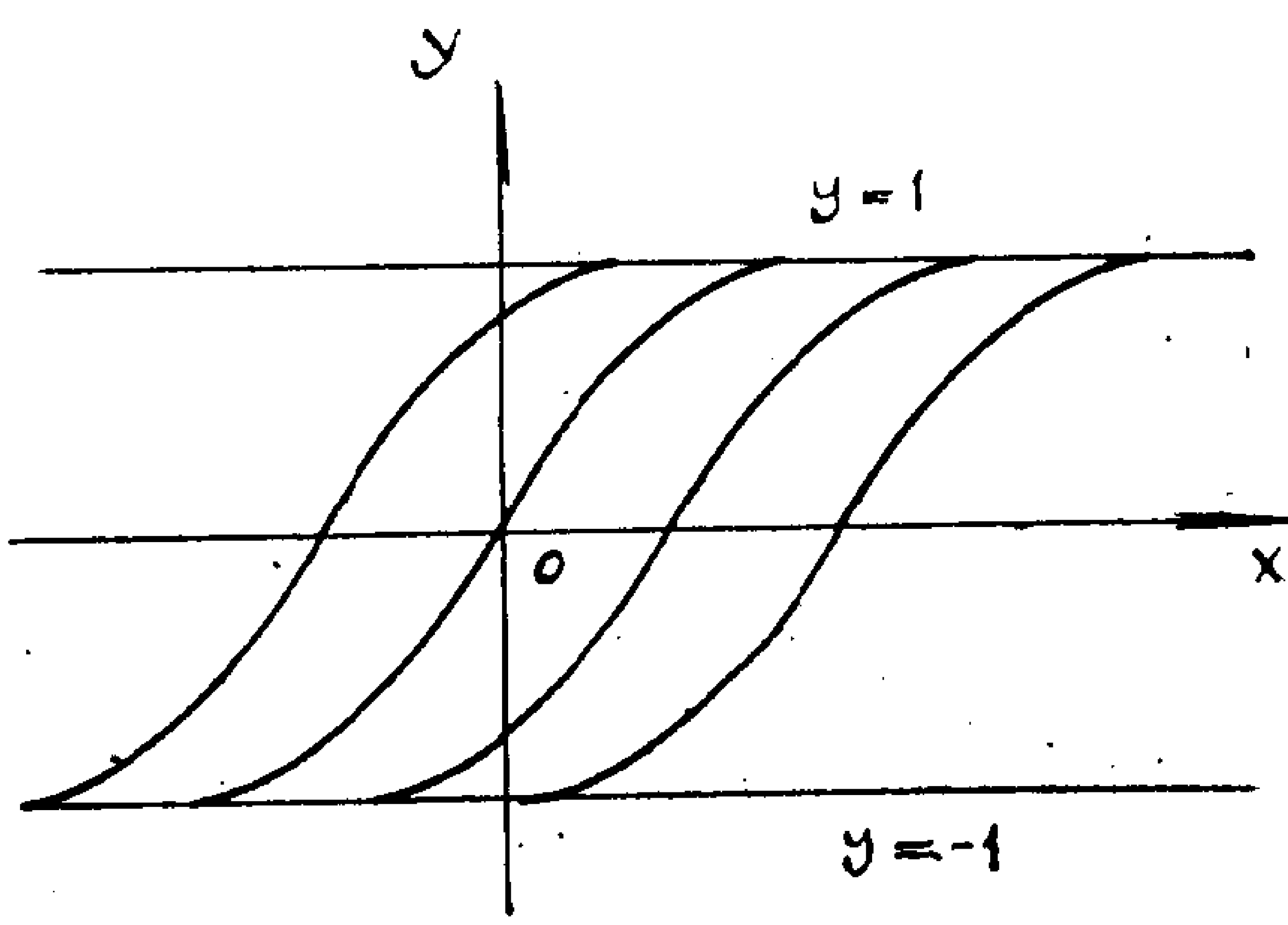


图 1.12

例2. 试讨论方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$$

的初值解的唯一性.

解. 在本节1°中已经说明这方程在$|y|<1$上满足初值解的存在与唯一性定理. 又易于看出$y=\pm1$是方程的解. 而$|y|>1$时，方程无定义，因此只须讨论$y=\pm1$上解是否唯一. 为此，求出方程的通解$y=\sin(x+c)$.

由于方程中解的导数应为正，故

$$y=\sin(x+c)$$

只在$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x+c\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k=0$, ±1, ±2, ……) 上为方程的解.

在$y=1$上任取一点（x_0, 1），代入通解，有

$$1=\sin(x_0+c),$$

$$\therefore \qquad x_0+c=\frac{\pi}{2}, \quad c=\frac{\pi}{2}-x_0.$$

于是，解

$$y=\sin\left(x-x_0+\frac{\pi}{2}\right)\ (x_0-\pi\leqslant x\leqslant x_0)$$

满足初值条件$y(x_0)=1$. 由于x_0的任意性，于是过$y=1$上任意一点都有两条积分曲线经过，从而破坏了解的唯一性（图1.12）.

同样可以证明，在积分曲线$y=-1$上任一点也有两条积分曲线经过.

有了这些具体的知识后，我们可以提出如下的定义.

定义1.3. 其上每一点都破坏唯一性的积分曲线称为微分方程（1.5）的**奇积分曲线**，它所对应的解称为方程的**奇解**.

于是，$y=0$为方程

$$\frac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}}$$

的奇解，$y=\pm 1$为方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$$

的奇解．

奇解无论在理论上或实际上都很有意义，因此我们来讨论两个问题．一个是如何判断方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.5}$$

是否存在奇解；另一个是如果（1.5）有奇解，如何把它求出来．

只要对存在与唯一性定理有较好的理解，这些问题在一定程度上是可以得到回答的．因为，定理指出，如果$f(x,y)$在区域G上连续且$f'_y(x,y)$在G上有界（或连续），则在G内，初值解是唯一的，从而G内肯定不存在奇解．

于是，可以肯定：如果在$f(x,y)$的定义域D内，存在唯一性定理条件满足，方程就不会有奇解；如果存在唯一性定理条件不是在整个$f(x,y)$的定义域内成立，则奇解只有到那些破坏存在唯一性定理条件的点集中去找，也就是到$f(x,y)$不连续或者$f'_y(x,y)$无界的点集中去找．

我们有如下的定理．

定理1.6． 某曲线L为方程（1.5）的奇积分曲线的必要条件为：在L上至少或者$f(x,y)$不连续，或者$f'_y(x,y)$无界．

这个定理所指出的必要条件不是充分的．因为，在存在唯一性定理条件破坏的点集中，可能根本就没有解．而且，在第三章中我们还要举出例子，说明即使我们所列举的存在唯一性定理条件被破坏，初值解也还可能是唯一的．

例3． 试判断方程

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}+2$$

是否存在奇解．

解． $f(x,y)=\sqrt{y-x}+2$．$f'_y(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y-x}}$在$y=x$时无界．所以，如果存在奇解，必为$y=x$．但是，$y=x$并不是原方程的解，从而方程无奇解．

再看一下例2．那里$f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$，$f'_y(x,y)=-y/\sqrt{1-y^2}$在$y=\pm 1$时无界，$y=\pm 1$又恰为方程的解，所以$y=\pm 1$可能为奇解．但是，它们到底是不是奇解呢？还得用其它的方法加以判断．

3°．包络线

本段我们从几何的角度提出一个由一阶微分方程

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.4}$$

或

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.5}$$

的通积分

$$\varphi(x,y,c)=0 \tag{1.39}$$

求方程的奇解的方法.

当任意常数c变化时，通积分（1.39）给出了方程（1.4）或（1.5）的一个积分曲线族（c），我们来定义（c）的**包络线**.

定义1.4. 假如经过曲线L上任意一点，均有（c）中某一条曲线与L相切，且在L上不同的点，L与（c）中不同的曲线相切，则称此曲线L为曲线族（c）的**包络线**.

例4. $(x-c)^2+y^2=1$的包络线为$y=\pm 1$. 如图1.13.

例5. $y=(x-c)^3$的包络线为$y=0$ 如图1.14、

我们之所以对包络线感兴趣，是因为有下面的定理.

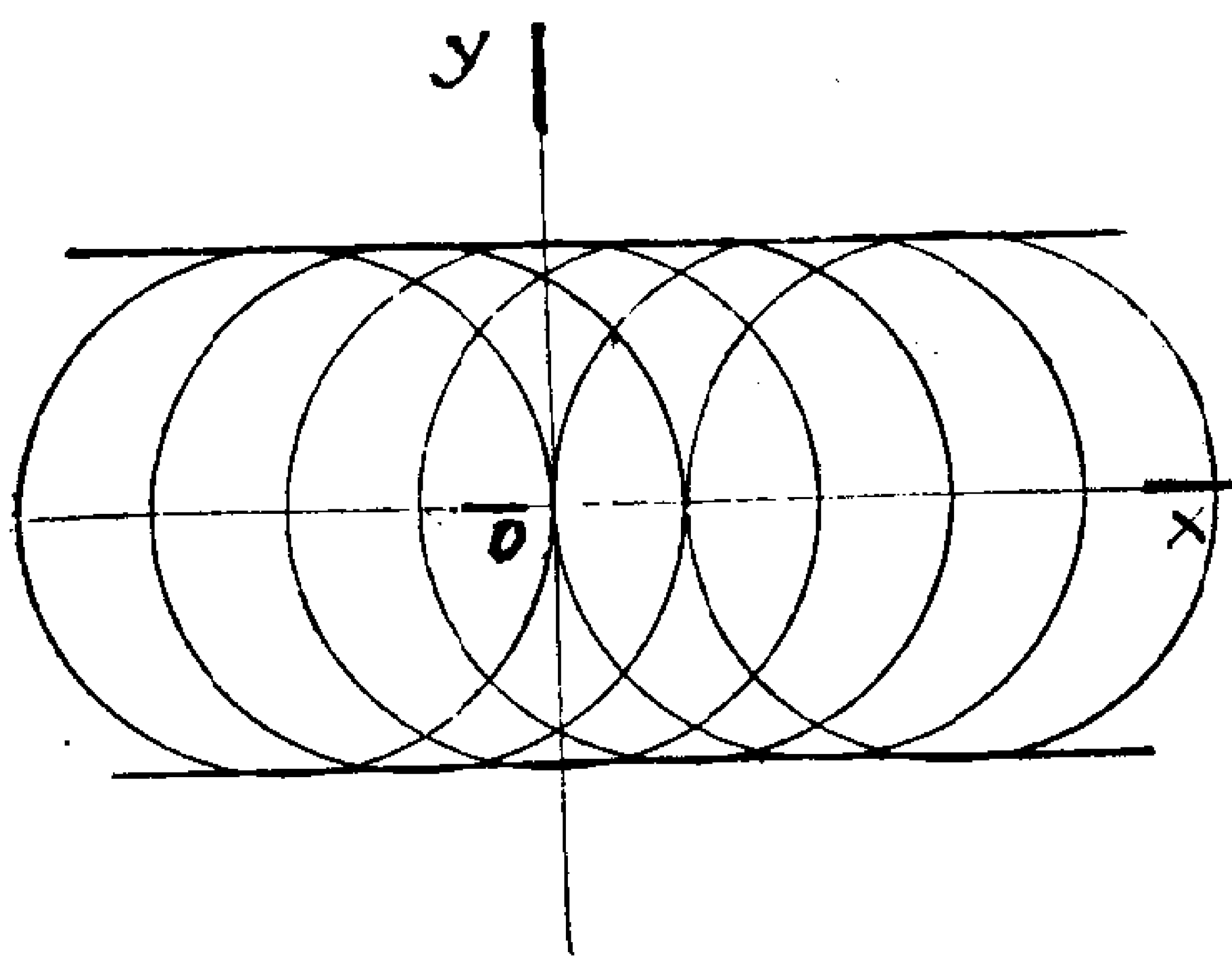


图 1.13

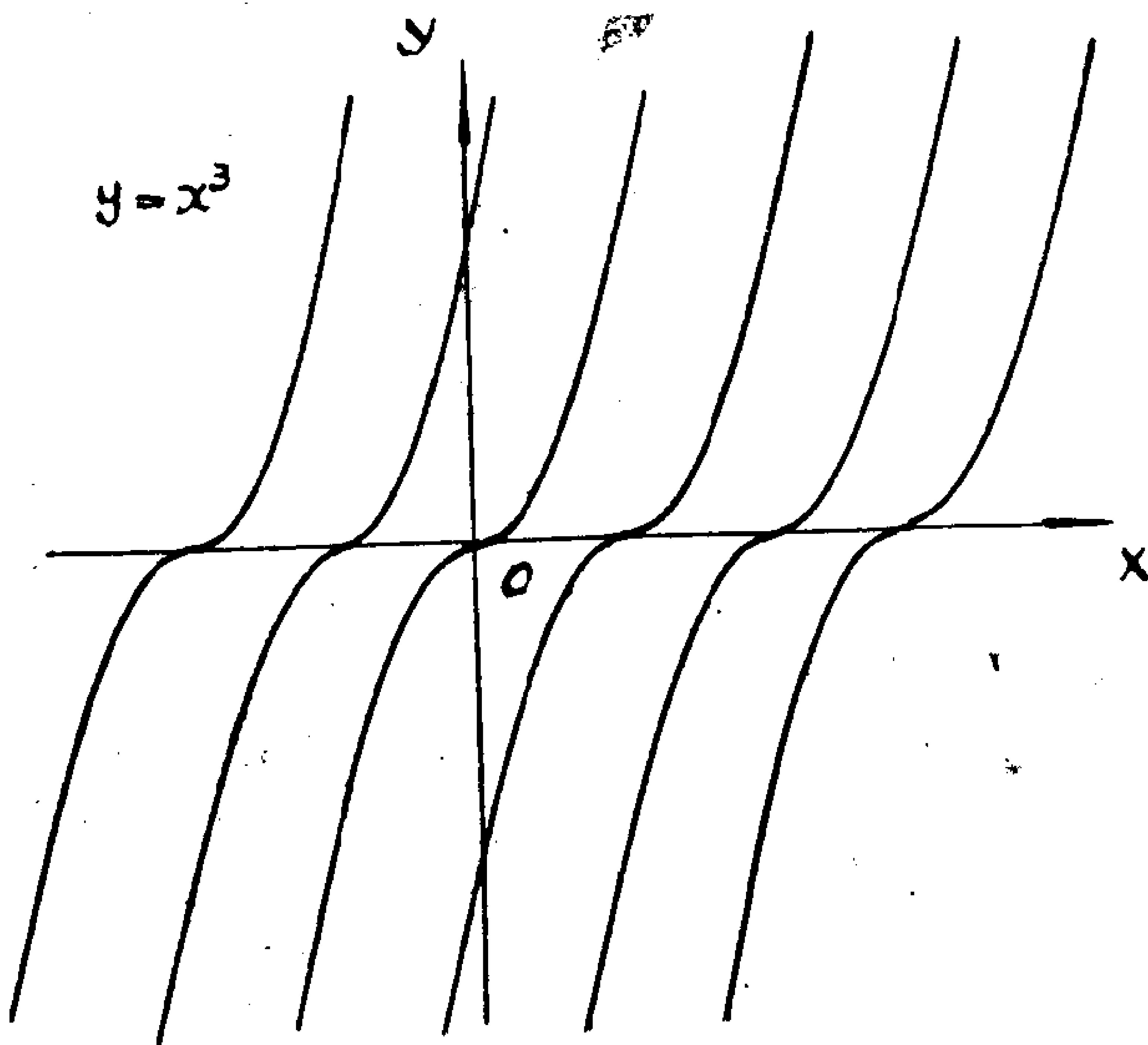


图 1.14

定理1.7. 方程（1.5）的积分曲线族（c）的包络线L是（1.5）的奇积分曲线.

证明. 只须证明（c）的包络线L是（1.5）的积分曲线就够了. 因为，一旦证明了这一点，由包络的定义就知道在其上每一点都破坏了解的唯一性，因此L就必然是奇积分曲线了.

设$P(x,y)$为L的任一点. 由包络线的定义，必有（c）中一曲线l过P点，且与其相切. 所以l与L在P点有公共切线. 由于l是积分曲线，它在P点的切线应与方向场在该点的方向一致，所以L在P的切线也就与方向场在该点的方向一致了. 这恰好表明L在其上任一点的切线均与方向场的方向一致，从而L是（1.5）的积分曲线. 定理证毕.

这个定理的逆定理也成立，请读者自己证明.

有了这个定理之后，求方程（1.5）的奇解的问题就化成求（1.5）的积分曲线族的包络线的问题了.

下面来研究求单参数曲线族（c）的包络线L的方法.

对L上任一点$P(x,y)$，均有（c）中的一条积分曲线l在P与L相切. 设l所对应的参数为c，故L上的点的坐标x,y为c的函数，设为

$$x=x(c),\ y=y(c).$$

因为$P(x,y)$ 在 l 上，故有恒等式

$$\varphi(x(c),y(c),\ c)\equiv 0.$$

L 在P的切线斜率为

$$k_L=\frac{y'(c)}{x'(c)},$$

l 在P的切线斜率为

$$k_l=-\frac{\varphi'_x(x(c),y(c),c)}{\varphi'_y(x(c),y(c),c)}$$

（设$\varphi'_x(x(c),\ y(c),c)$ 与$\varphi'_y(x(c),y(c),c)$ 不同时为0），因为 l 与L 在 P 点相切，故有 $k_L=k_l$，即有关系式

$$\varphi'_x(x(c),y(c),c)x'(c)+\varphi'_y(x(c),y(c),c)y'(c)\equiv 0. \qquad (1.40)$$

另一方面，由$\varphi(x(c),y(c),c)\equiv 0$ 对c 求导数，可得

$$\varphi'_x(x(c),y(c),c)x'(c)+\varphi'_y(x(c),y(c),c)y'(c)$$
$$+\varphi'_c(x(c),y(c),c)\equiv 0.$$

与（1.40）比较，可得

$$\varphi'_c(x(c),y(c),c)\equiv 0.$$

于是，（c）的包络线的方程 $x=x(c)$，$y=y(c)$ 应满足方程组

$$\begin{cases}\varphi(x,y,c)=0,\\ \varphi'_c(x,y,c)=0.\end{cases} \qquad (1.41)$$

但是，由（1.41）解出的参数方程

$$x=x(c),\ y=y(c)$$

所代表的曲线是否一定是（c）的包络呢？关键在于是否可以由（1.41）推出$k_l=k_L$ $\left(\text{或}\frac{1}{k_l}=\frac{1}{k_L}\right)$. 由(1.41) 可以推出（1.40），而由（1.40）要推出$k_l=k_L$（或 $1/k_l=1/k_L$），必须假定 $\varphi'_x(x(c),y(c),\ c)$ 与 $\varphi'_y(x(c),y(c),c)$ 中至少有一个不为零才行. 因此，由（1.41）解出 $x=x(c)$，$y=y(c)$之后，必须进行检查. 否则，由(1.41) 所解出的 $x=x(c)$，$y=y(c)$ 未必一定是包络线.

例6. 求曲线族

（c）：$$(x-c)^2+(y-c)^2=1$$

的包络线（图1.15）.

解.

c 所对应的方程组（1.41）为

$$\begin{cases}(x-c)^2+(y-c)^2=1\\ (x-c)+(y-c)=0,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x = c \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = c \mp \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

消去c，得到$x - y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 因为

$$\varphi'_y(x(c),\ y(c),c) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0\ .$$

所以$x - y = \pm\sqrt{2}$是包络线.

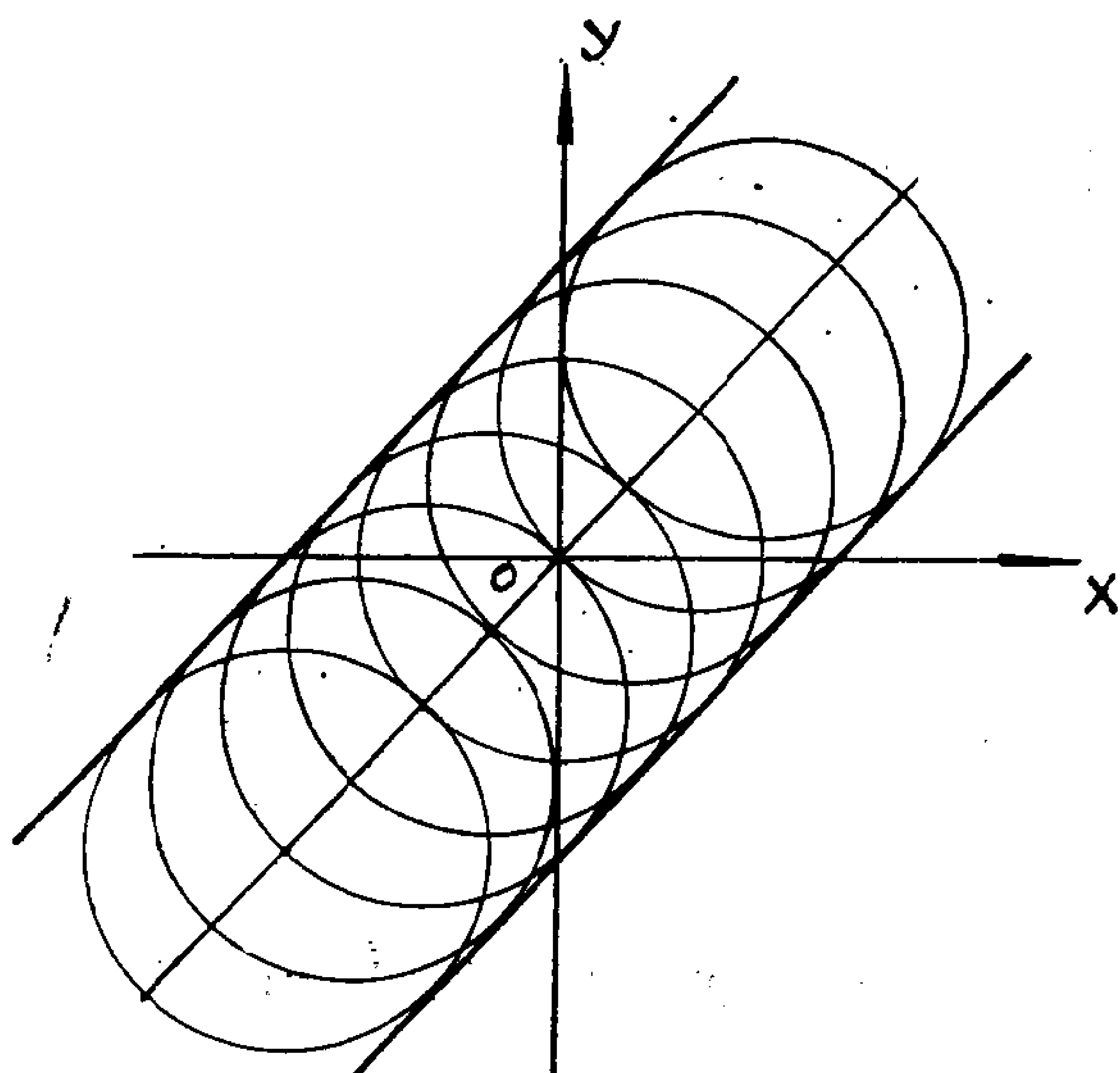


图 1.15

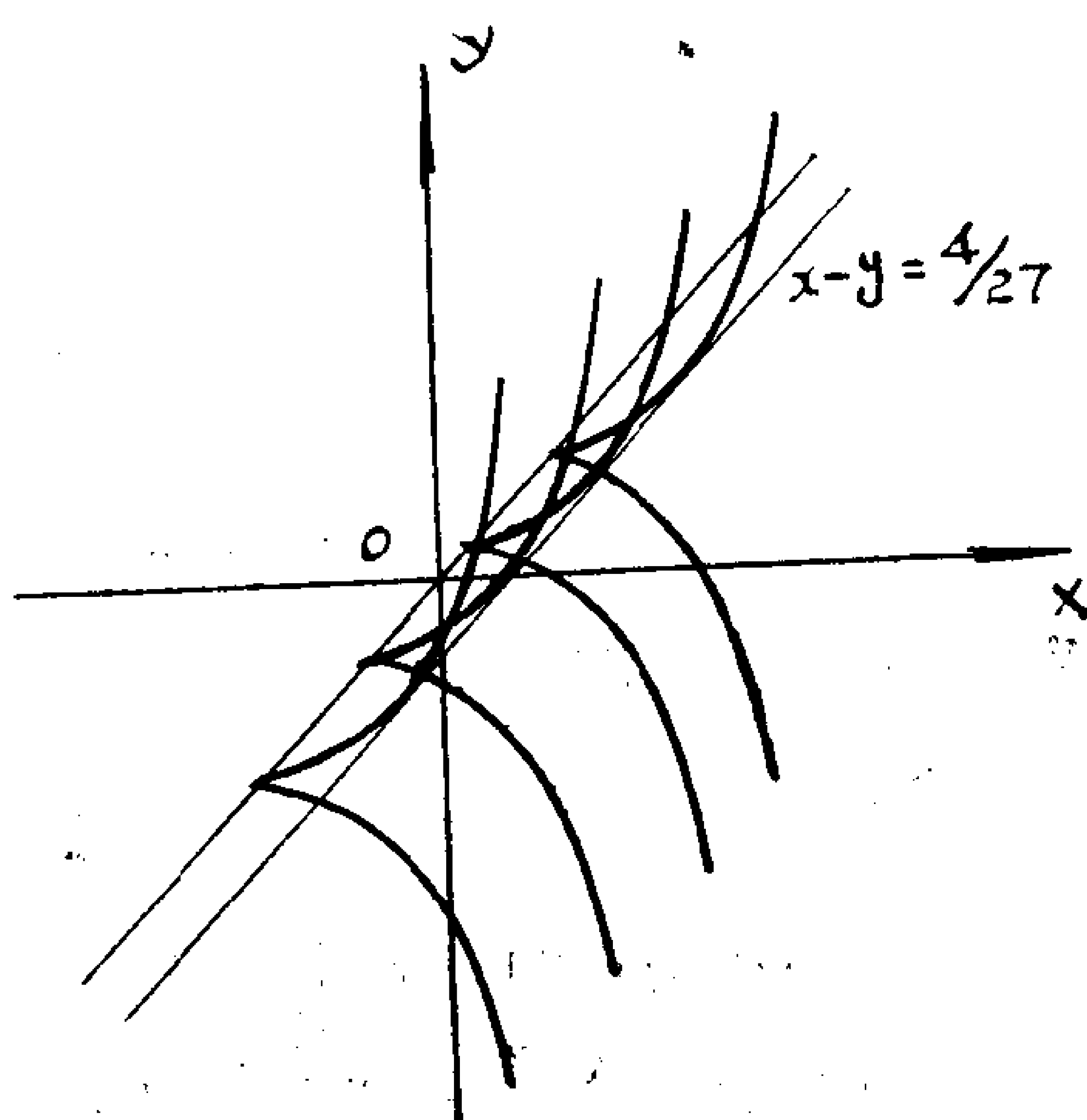


图 1.16

例7. 求曲线族

$$(y-c)^2 = (x-c)^3$$

的包络线.

解. 方程组（1.41）为

$$\begin{cases} (y-c)^2 = (x-c)^3 \\ 2(y-c) = 3(x-c)^2. \end{cases}$$

解得两组解

$$\begin{cases} x = c \\ y = c \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = c - 4/9. \\ y = c - 8/27. \end{cases}$$

消去c得到两条直线

$$y = x \quad 及 \quad x - y = 4/27.$$

对于$y = x$，由于

$$\varphi'_x(x(c),y(c),c) \equiv 0 \quad 及 \quad \varphi'_y(x(c),y(c),c) \equiv 0,$$

故不能肯定其为包络．事实上它是尖点的轨迹（图1.16）．

对于 $x-y=4/27$，由于 $\varphi'_y(x(c),y(c),c)=\left(\frac{8}{27}\right)^2\neq 0$，故为包络．

由于有了求包络的方法，就可以用这个方法来求方程（1.5）的奇解了．

例8． 求 $y'=\sqrt{1-y^2}$ 的奇解．

解． 由前面已知方程的通解为

$$y=\sin(x+c).$$

从而积分曲线族的包络应满足方程组

$$\begin{cases} y=\sin(x+c) \\ \cos(x+c)=0. \end{cases}$$

消去 c．由第二式可得

$$x+c=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\quad(k=0,1,2,\cdots,).$$

代入第一式，得到

$$y=\pm 1.$$

因为

$$\varphi'_y(x,y,c)=1\neq 0,$$

故 $y=\pm 1$ 为方程的奇解．

习　　题 1.7

1．求下列方程的奇解并作图

1）$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}+4x=0$；　　2）$(3y-1)^2(y')^2=4y$；

3）$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}+y=0$；　　4）$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=a^2$．

2．求下列曲线族的包络线．

1）$y^{\frac{1}{3}}-(x+c)^{\frac{1}{2}}=0$；　　2）$5x^2+5y^2-10cx+4c^2=0$；

3）$cx-\sqrt{1+c^2}y+ac=0$；　　4）$x^2+(y-4c)^2=8c^2$．

§1.8　一阶隐式微分方程

前面几节都是讲的解出 y' 的显方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{1.5}$$

本节要讨论未解出 y' 的隐式微分方程

$$F(x,y,y')=0.\tag{1.4}$$

假如能从（1.4）中把 y' 解出，那么就得到一个或几个显方程

$$y'=f_i(x,y)\quad(i=1,2,\cdots).$$

积分这些显式一阶微方程，就得到方程（1.4）的解.

例1. 求解方程 $y'^2-(x+y)y'+xy=0$.

解. 方程左端可以分解因式，得

$$(y'-x)(y'-y)=0.$$

从而得到两个方程

$$y'=x,\quad y'=y.$$

这两个方程均可求积，得

$$y=\frac{1}{2}x^2+c \quad 及 \quad y=ce^x.$$

但是，一般说来，并不易于由（1.4）中把 y' 解出来. 或者，即使能解出 y' 来，却往往不是可积的微分方程. 因此，本节来探求不解出 y' 而直接求解 y 的几种常见的方法.

因为在求全部解时，必须考虑奇解的问题，因此，还要先对隐式方程（1.4）的初值问题的唯一性问题做一些解释. 因为，在这时出现一些与显式方程不尽全同的情况.

例如要求例 1 中的方程满足初始条件.

$$y(0)=1$$

的解. 因为原方程有两个通解

$$y_1=\frac{1}{2}x^2+c \quad 及 \quad y_2=ce^x.$$

以 $y(0)=1$ 代入 y_1，得到初值解 $y_1=\frac{1}{2}x^2+1$. 代入 y_2，得到 $y_2=e^x$. 于是有两条积分曲线经过点（0,1）（图1.17）. 那末要问：方程是否在点（0,1）处破坏了唯一性呢？我们说，没有破坏.

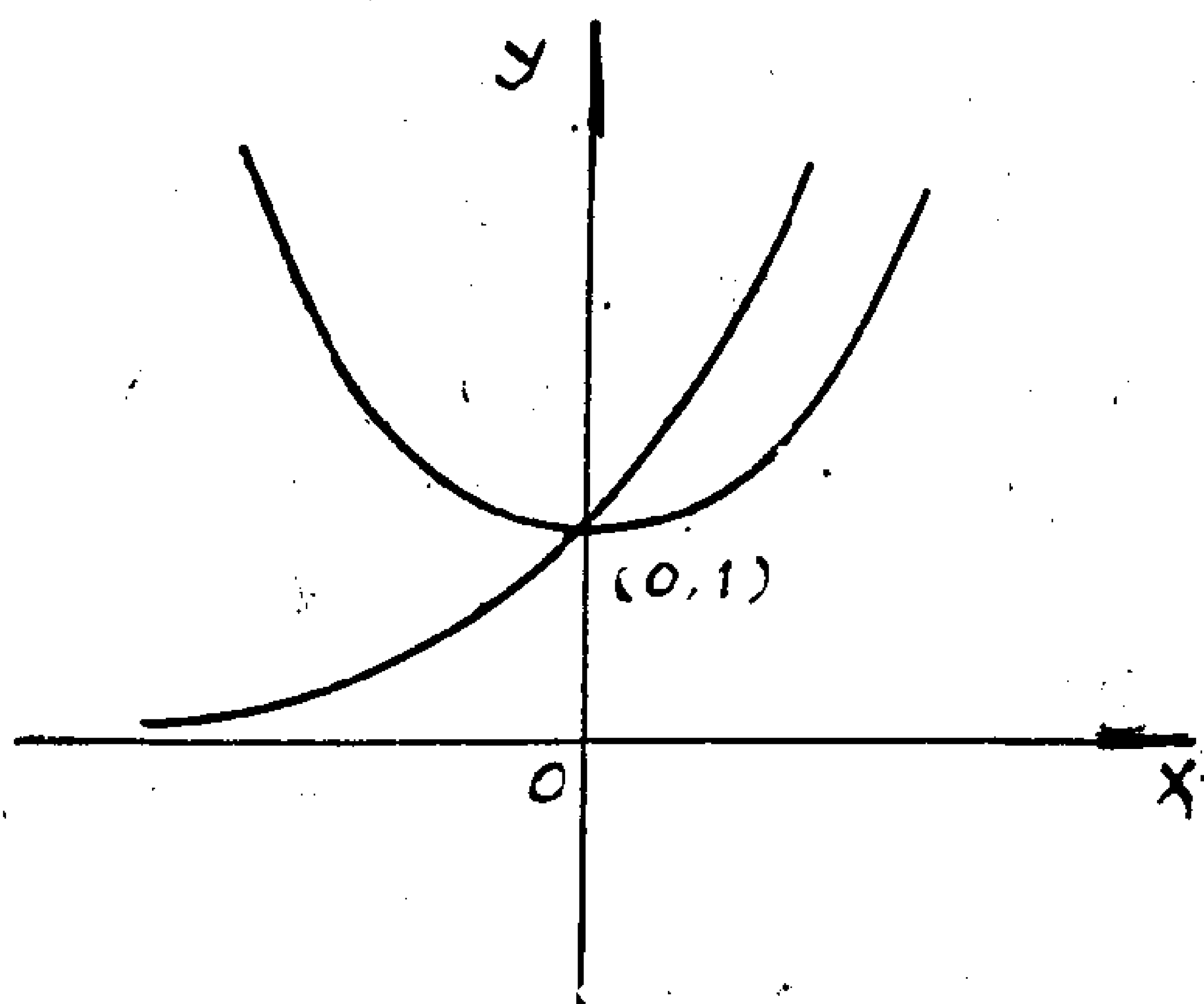


图 1.17

前面讨论显式方程时，因为对于每个点 (x_0, y_0)，方向场只有一个方向，因此，当经过 (x_0, y_0) 有两条积分曲线时，这两条积分曲线一定是相切的. 但是对于上面的问题，在点（0,1），$y_1=\frac{1}{2}x^2+1$ 和 $y=e^x$ 并不相切. 因此，这与在一点有多于一条积分曲线相切的情形是不同的.

一般说来，由隐函数理论，隐式方程（1.4）可能相当于**多于一个的**显式方程（不论是否能解出 y' 来）. 所以，通过给定点 (x_0, y_0) 的积分曲线，就有可能多于一条. 这时，对于隐式方程（1.4）的满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的唯一性应作如下的理解：沿着**每一个方向** y'_0，过 (x_0, y_0)(其

中应有 $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ ），方程（1.4）有唯一的积分曲线．否则，就算破坏了解的唯一性．

作了这个说明之后，§1.7中关于奇解的定义也就适用于方程（1.4）了．这样，我们不难看出，方程（1.4）的积分曲线族．

（c）：　　$\varphi(x, y, c) = 0$

的包络线一定是奇积分曲线．事实上，和显式方程（1.5）一样，一方面，积分曲线族（c）的包络线是积分曲线；另一方面，过包络线的每一点，沿给定的方向至少有两条积分曲线通过，即包络线和（c）中某条与包络线相切的积分曲线．这就是说，在包络线上每一点，唯一性都遭到破坏．因此，方程（1.4）的积分曲线族（c）的包络线一定是奇积分曲线．

下面就来介绍几种常见的可积的隐式方程的解法．

1°．由（1.4）可解出 y，即

$$y = f(x, y'). \tag{1.42}$$

这时，引入新未知函数 $p = y'$．于是，（1.42）变为

$$y = f(x, p). \tag{1.43}$$

如果能设法求得 p，代入上式即可求得（1.42）的解．

将（1.43）对 x 求导数，得

$$p = f'_x(x, p) + f'_p(x, p)\frac{dp}{dx}. \tag{1.44}$$

这是一个关于变量 x，p 的可解出 $\frac{dp}{dx}$ 的方程．假如能求得通解

$$p = p(x, c),$$

代入（1.43）即得（1.42）的通解

$$y = f(x, p(x, c)).$$

我们在这里强调应将 $p = p(x, c)$ 代入（1.43），是因为 p 须满足（1.43）．切不可在求得 $p = p(x, c)$ 之后，将 p 认为是 y'，用积分来求 y．请读者注意．

如果只能求得（1.44）的通积分

$$G(x, p, c) = 0,$$

则将它与（1.43）联立，即

$$\begin{cases} G(x, p, c) = 0, \\ y = f(x, p), \end{cases}$$

消去 p，可得到（1.42）的通积分．

例2． 求解 $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$．

解． 令 $y' = p$，得

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \tag{1.45}$$

两端对 x 求导数并整理化简后，得

$$(2p-x)\left(\frac{dp}{dx}-1\right)=0 .$$

取 $2p-x=0$，得 $p=\frac{x}{2}$，代入（1.45），得到解 $y=\frac{x^2}{4}$

取 $\frac{dp}{dx}-1=0$，即 $\frac{dp}{dx}=1$，积分得 $p=x+c$. 代入（1.45），得原方程的通解

$$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2.$$

再求积分曲线族的包络线．解方程组

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2 \\ x+2c=0 , \end{cases}$$

得到 $y=\frac{x^2}{4}$. 恰为前面求得的特解．

因为，$\varphi'_y=1\neq 0$， 故 $y=\frac{x^2}{4}$ 为积分曲线族的包络，从而 $y=\frac{x^2}{4}$ 是方程的奇解．

作为（1.42）的一个重要类型，我们来研究**克莱洛（Clairaut）方程**

$$y=xy'+\varphi(y') \tag{1.46}$$

和**拉格朗日（Lagrange）方程**

$$y=x\psi(y')+\varphi(y'). \tag{1.47}$$

利用上面的解法，先解克莱洛方程（1.46）．令 $y'=p$，代入（1.46），得

$$y=xp+\varphi(p). \tag{1.48}$$

两端对 x 求导并整理后，得

$$[x+\varphi'(p)]\frac{dp}{dx}=0 .$$

取 $\frac{dp}{dx}=0$，得 $p=c$，代入（1.46），得到通解

$$y=cx+\varphi(c).$$

请注意这个解恰好就是在（1.46）中用 c 取代 y' 而成，

取 $x+\varphi'(p)=0$，这不是微分方程，可直接与（1.48）联立，即

$$\begin{cases} x+\varphi'(p)=0 \\ y=xp+\varphi(p). \end{cases} \tag{1.49}$$

得到一个特解．我们指出，这个解恰为奇解．事实上，通解的积分曲线族的包络线方程为

$$\begin{cases} y=cx+\varphi(c) \\ x+\varphi'(c)=0 . \end{cases}$$

这与（1.49）完全相同，只不过 c 与 p 在文字上的不同罢了．

关于拉格朗日方程的解法与上相似，从略．

例3. 求曲线，使其每一点的切线均与两坐标轴围成面积等于2的三角形（图1.18）.

解. 首先，由解析几何知识可知，凡满足 $|ab|=4$ 的直线

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

都是所求曲线. 但除此之外，是否还有其它的曲线呢？

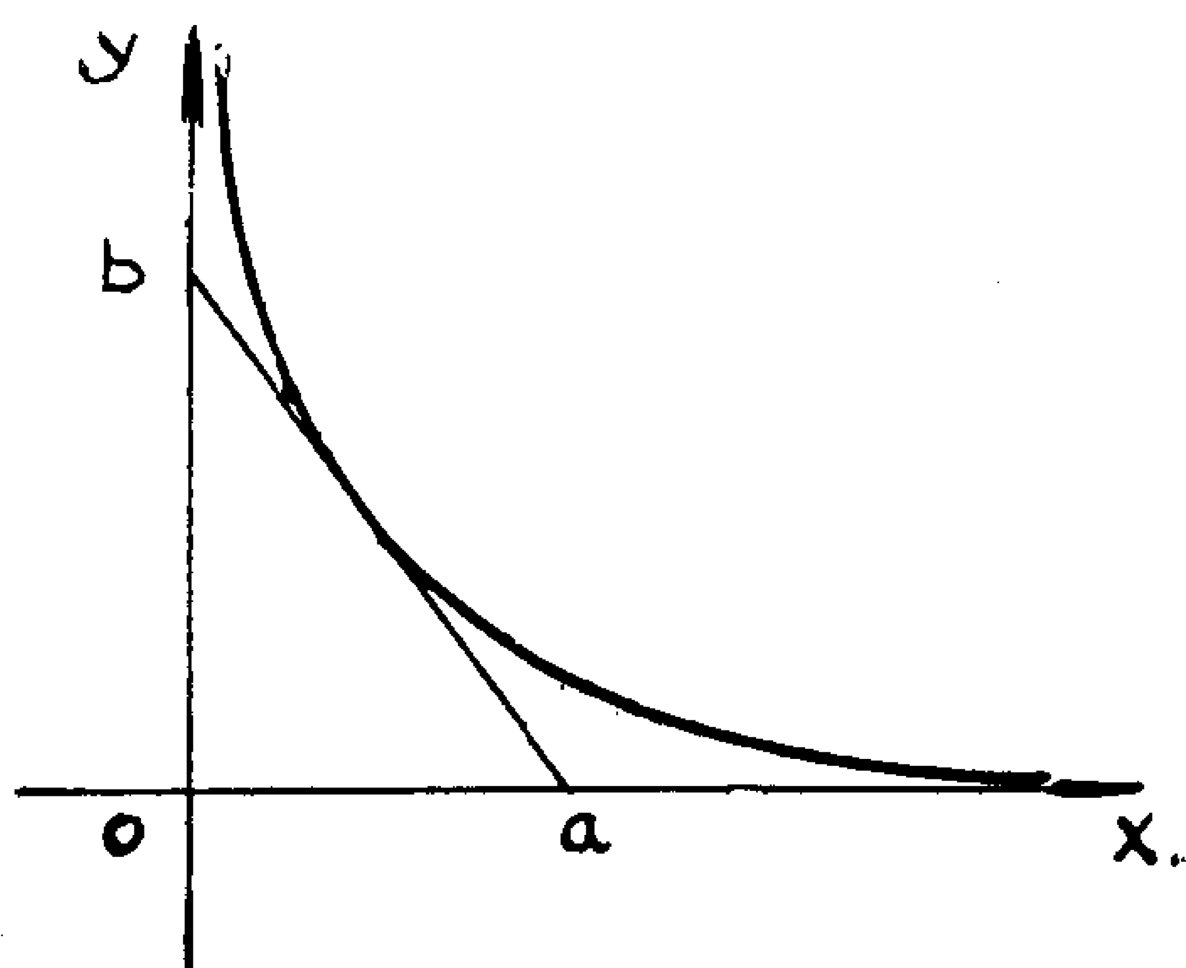


图 1.18

设 (x,y) 为所求曲线上的点，(X,Y) 为其切线上的点，则过 (x,y) 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

显然有 $a=x-\frac{y}{y'}$，$b=y-xy'$，比处 a 与 b 分别为切线在 oX 轴与 oY 轴上的截距.

当 $a,b>0$ 时，有

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)(y-xy')=4,$$

或

$$(xy'-y)^2=-4y',$$

解出 y，得到克莱洛方程

$$y=xy'\pm 2\sqrt{-y'}.$$

通解为

$$y=cx\pm 2\sqrt{-c} \qquad (c<0)$$

易于验证它们恰为前面所指出的直线族.

此外，方程还有奇解. 解方程组

$$\begin{cases} y=cx\pm\sqrt{-c} \\ x\pm\dfrac{1}{\sqrt{-c}}=0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{-c}} \\ y=\pm\sqrt{-c}. \end{cases}$$

消去 c，得到双曲线

$$xy=1.$$

它也是所求的曲线.

当 $a\cdot b<0$ 时，还可求得直线族

$$y=cx\pm 2\sqrt{c} \qquad (c>0)$$

及其包络线.

$$xy=-1.$$

就问题中所求的曲线而言，只有双曲线才是真正要的曲线．可见，奇解或包络在实际问题中往往倒是更为重要的．

2°．由（1.4）中可解出x，即

$$x=f(y,y'). \tag{1.50}$$

它的解法与1°中的方法相似．

令$y'=p$，有

$$x=f(y,p). \tag{1.51}$$

将上式对y求导，有

$$\frac{1}{p}=f'_y(y,p)+f'_p(y,p)\frac{dp}{dy}. \tag{1.52}$$

这是可解出$\frac{dp}{dy}$的方程．如果能求得它的通解$p=p(y,c)$，代入（1.51）即得（1.50）的通积分

$$x=f(y,p(y,c)).$$

如果能求得（1.52）的通积分

$$\varphi(y,p,c)=0,$$

将它与（1.51）联立，即得（1.50）的参数形式的通积分

$$\begin{cases}\varphi(y,p,c)=0\\ x=f(y,p).\end{cases}$$

例4. 求解$y'^3-4xyy'+8y^2=0$．

解. 解出x，得

$$x=\frac{y'^2}{4y}+\frac{2y}{y'}.$$

令$y'=p$，得

$$x=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p}. \tag{1.53}$$

对y求导并整理后得

$$\left(\frac{p^3-4y^2}{2yp}\right)\left(\frac{dp}{dy}-\frac{p}{2y}\right)=0.$$

取$p^3-4y^2=0$，得$p=(4y^2)^{\frac{1}{3}}$，代入（1.53），得到特解

$$y=\frac{4}{27}x^3.$$

取$\frac{dp}{dp}=\frac{p}{2y}$，解出$p=cy^{\frac{1}{2}}$，代入（1.53），得到通积分

$$x=\frac{c^2}{4}+\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{c}.$$

将它写成

$$9y^{\frac{1}{2}}-4cx+c^3=0,$$

消去根号后得

$$64y=(4cx-c^3)^2.$$

令 $c_1=c^2/4$，则上式可写成较整齐的形式

$$y=c_1(x-c_1)^2.$$

今求这积分曲线族的包络线．将上式对 c_1 求导数，得到

$$(x-c_1)(x-3c_1)=0.$$

即

$$c_1=x \quad 或 \quad c_1=\frac{1}{3}x.$$

将它们代入 $y=c_1(x-c_1)^2$，分别得到解

$$y=0 \quad 及 \quad y=\frac{4}{27}x^3.$$

易于检验，它们都是奇解，第一个解 $y=0$ 是在由原方程解 x 时丢失了的；第二个解不包含在通解之中．

3°．如果由方程（1.4）中不能解出 y' 以及 y 和 x，或者即使可以解出其中某一个，但所得到的方程不易求解，则可以用参数方程来求解，我们只讨论两种特殊情形，

首先，假如（1.4）具有特殊形状

$$F(x,y')=0,$$

而且它可以表为参数形式

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y'=\psi(t). \end{cases}$$

这时，由于

$$dx=x'_t\,dt=\varphi'(t)\,dt,$$

可知

$$dy=y'_x\,dx=\psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

从而

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)\,dt+c.$$

于是得到原方程的参数形式的解

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\displaystyle\int\psi(t)\varphi'(t)\,dt+c. \end{cases}$$

其次，讨论方程

$$F(y,y')=0.$$

设其可以表示为参数形式

$$\begin{cases} y=\varphi(t), \\ y'=\psi(t). \end{cases}$$

由于

$$dx=\frac{dy}{y'_x}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)},$$

有

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c\ .$$

从而得到参数形式的解

$$\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c\ , \\ y=\varphi(t). \end{cases}$$

例4. $x\sqrt{1+y'^2}=y'$

解. 令 $y'=\operatorname{tg}t$，有 $x=\sin t$. 于是，$dy=y'_x dx=\operatorname{tg}t\cdot\cos t\,dt=\sin t\,dt$，积分得到

$$y=-\cos t+c\ .$$

从而通解为

$$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=-\cos+c\ . \end{cases}$$

消去 t，得到通积分

$$x^2+(y-c)^2=1,$$

及通解

$$y=c\pm\sqrt{1-x^2}.$$

例5. 求解 $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=1$.

解. 令 $y'=\operatorname{sh}t$，则 $y=\operatorname{ch}t$.

于是

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\operatorname{sh}t\,dt}{\operatorname{sh}t}=dt\ .$$

从而

$$x=t+c.$$

由

$$\begin{cases} x=t+c, \\ y=\operatorname{ch}t, \end{cases}$$

消去 t，得到通解

$$y=\operatorname{ch}(x-c).$$

题 1.8

1. 求下列方程的通解和奇解：

1）$y'^2-y^2=0$　　2）$8y'^2=27y$

3）$y^2(y'^2+1)=1$　　4）$y'^2=4y^3(1-y)$

5）$4(1-y)=(3y-2)^2y'^2$　　6）$y'(2y-y')=y^2\sin^2x$

7）$y'(x-\ln y')=1$　　　8）$y'^2-2yy'=y^2(e^x-1)$

9）$y=\ln(1+y'^2)$　　　10）$y=(y'-1)e^{y'}$.

2. 求一曲线，此曲线具有如下性质：曲线上任一点的切线，在x，y轴上的截距之和为1.

3. 求一曲线，此曲线的任一切线在两个坐标轴间的线段长等于常数a.

§1.9 一阶微分方程的应用举例

我们在前几节的一些实际问题的例子中已经看到，在求某些变量之间的函数关系时，往往不能直接找到这些函数关系，但却经常易于建立这些变量所满足的微分方程，如果这些方程可求解，就可求得所求的函数关系了，这种方法已经广泛地应用于物理学、力学、几何学以及工程技术等方面，成为研究各种事物变化规律的有力工具，本节再举一些例子予以说明。

用微分方程来解决实际问题，一般可以分为三个步骤：（1）根据所给的条件列出微分方程；（2）求解这个方程；（3）通过解的性质来研究所提出的问题。

1°. 在几何中的应用

当在几何中要求具有某种与切线或法线有关的性质的平面曲线时，往往归结为求解一阶常微分方程式，这是因为，若用$y=y(x)$表示所求曲线的方程，则曲线的切线的斜率就是y'，而法线的斜率就是$-1/y'$. 于是，根据有关的性质列出的微分方程，当然就是关于y'的方程，从而也就是一阶常微分方程了. 通过一阶常微分方程在几何中的应用，可以使我们进一步掌握与理解有关的解析几何的知识.

例1　求探照灯反射鏡面轮廓线.

解. 第一章§1.1例2已经把这个问题归结为求方程

$$yy'^2+2xy'-y=0$$

的解. 解出y，得

$$y=\frac{2xy'}{1-y'^2}.$$

令$y'=p$，得

$$y=\frac{2xp}{1-p^2}. \tag{1.54}$$

两端对x求导数，得到

$$p=\frac{2p}{1-p^2}+\frac{2(1+p^2)x}{(1-p^2)^2}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

化简后得

$$2x\frac{dp}{dx}=p(p^2-1).$$

分离变量后积分得到

$$x=\frac{c(p^2-1)}{p}.$$

这式与（1.54）联立消去 p，得到

$$y^2=4c(x+c).$$

这是以 x 轴为轴，焦点在原点的抛物线族.

于是，只有抛物线才是具有我们对探照灯所提出的要求的曲线.

例2. 求过点 A（2，−2）的一条曲线，此曲线具有这样的性质：对于曲线上任一点 $P(x,y)$，过 P 的切线与 x 轴的交点为 B，则向径 oP,PB 和 x 轴所围成的三角形面积为 2.

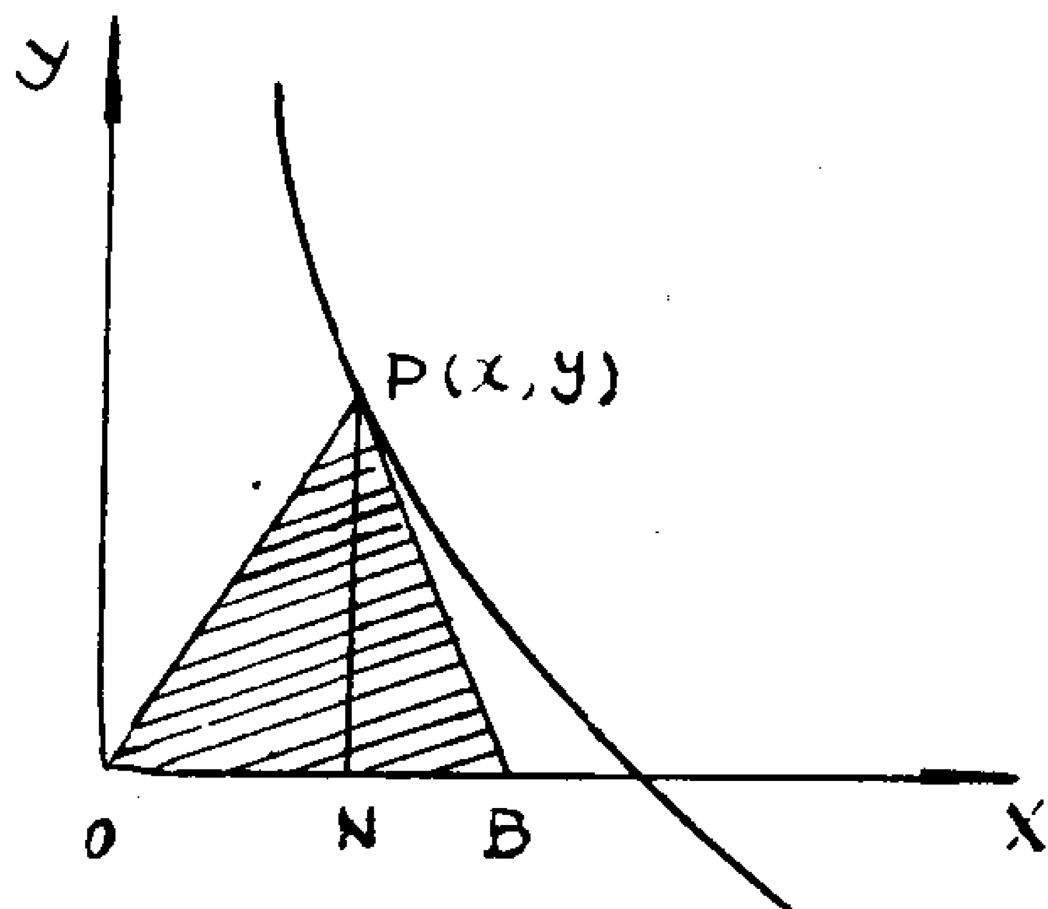


图 1.19

解. 设曲线方程为

$$y=y(x).$$

过点 $P(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

切线与 x 轴的交点坐标为 $B\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$.

由图1.19可知三角形 oPB 的面积为.

$$S=\frac{1}{2}oP\cdot PN.$$

其中 $PN=y$， $oB=x-\frac{y}{y'}$，于是列出微分方程

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right)y=2,$$

或

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)y=4.$$

整理后，得到以 x 为未知函数的一阶线性方程

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-\frac{4}{y^2}.$$

因已知所求曲线过点 $A(2,-2)$，故所求解满足初始条件 $x(-2)=2$.

由线性方程初值解的公式，有

$$x=\left[\int_{-2}^{y}\left(-\frac{4}{y^2}\right)e^{\int_{-2}^{y}\left(-\frac{1}{y}\right)dy}dy+1\right]e^{\int_{-2}^{y}\left(-\frac{1}{y}\right)dy}$$

$$=\frac{2}{y}-\frac{2}{3}y,$$

或

$$3y^2+2xy-4=0.$$

2°. 等角轨线

在物理学中有这样一个问题：点振源在均匀介质中的波的波前是圆周，如小石激起的水波，点光源波等. 但当介质不均匀时，点振源的波前就不是圆周了，而波的前进方

向总是与波前垂直的，因此就提出了如何求与非圆周波前曲线正交的曲线问题，约翰·贝努利（*John Bernoulli*）在1694年还提出了较一般的问题：求这样的曲线或曲线族，使得它与某已知曲线族的每一条曲线都相交成给定的角度．这样的曲线称为已知曲线族的**等角轨线**．当所给定的角为直角时，等角轨线就称为**正交轨线**．等角轨线在其它很多学科（如天文、气象等）中都有应用．下面就来介绍求等角轨线的方法．

首先把问题进一步提明确一些：设在(x,y)平面上，给定一个单参数曲线族(c)：$\varphi(x, y, c)=0$，求这样的曲线l，使得l与(c)中每一条曲线的交角都是定角α（图1.20）．

设l的方程为$y_1=y_1(x)$．为了求出$y_1(x)$，当然应当先求出$y_1(x)$所应满足的微分方程，也就是要先求得x, y_1, y_1'的关系式．怎么求？条件告诉我们l与(c)的曲线相交成定角α．于是，可以想见，y_1和y_1'必然应当与(c)中的曲线$y=y(x)$及其切线的斜率y'有一个关系．事实上，当$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时，有

$$\frac{y'-y_1'}{1+y'y_1'}=\mathrm{tg}\alpha=k,$$

或

$$y'=\frac{y_1'-k}{ky_1'+1}. \qquad (1.55)$$

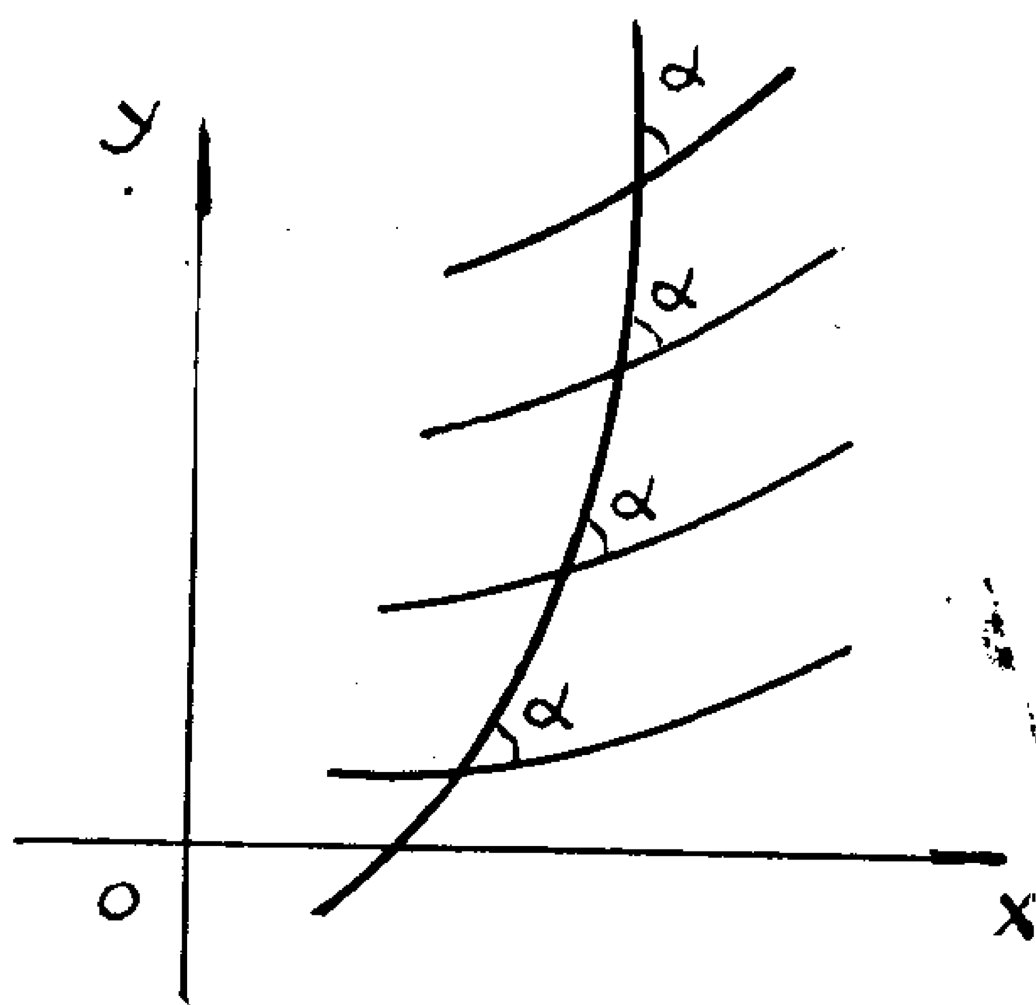


图 1.20

当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，有

$$y'=-\frac{1}{y_1'}. \qquad (1.56)$$

又因为在交点处，$y(x)=y_1(x)$，于是，如果我们能求得x, y, y'的关系，即曲线族(c)所满足的微分方程

$$F(x, y, y')=0, \qquad (1.4)$$

只要把$y=y_1$和(1.55)或(1.56)代入(1.4)，就可以求得x, y_1, y_1'的方程了．

如何求(1.4)呢？采用分析法．设$y=y(x)$为(c)中任一条曲线．于是存在相应的c，使得

$$\varphi(x, y(x), c)\equiv 0. \qquad (1.57)$$

因为要求x, y, y'的关系，将上式对x求导数，得

$$\varphi_x'(x, y(x), c)+\varphi_y'(x, y(x), c)\cdot y'(x)\equiv 0. \qquad (1.58)$$

这样，将上两式联立，即由

$$\begin{cases}\varphi(x, y, c)=0,\\ \varphi_x'(x, y, c)+\varphi_y'(x, y, c)\cdot y'=0,\end{cases} \qquad (1.59)$$

消去c，就可以得出$x, y(x), y'(x)$所应当满足的关系

$$F(x, y, y')=0.$$

这个关系称为曲线族(c)的**微分方程**．

于是，某角轨线$\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$的微分方程就是

$$F\left(x, y_1, \frac{y_1'-k}{1+ky_1'}\right)=0, \tag{1.60}$$

而正交轨线的微分方程为

$$F\left(x, y_1, -\frac{1}{y_1'}\right)=0. \tag{1.61}$$

为了避免符号的烦琐，以上两个方程可以不用y_1的符号，而仍用y，只要我们明确它是所求的等角轨线的方程就行了.

为了求得等角轨线或正交轨线，我们就应当求得上述两个方程.

例3. 求直线束 $y=cx$ 的等角轨线和正交轨线.

解. 首先求直线族 $y=cx$ 的微分方程.

将 $y=cx$ 对x求导数，得 $y'=c$，由

$$\begin{cases} y=cx, \\ y'=c, \end{cases}$$

消去c，就得到 $y=cx$ 的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},$$

当$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时，由（1.60）可知，等角轨线微分方程为

$$\frac{\frac{dy}{dx}-k}{1+k\frac{dy}{dx}}=\frac{y}{x},$$

或

$$xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{k},$$

及

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{k}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

即

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{k}\cdot\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

积分后，得到

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln c,$$

或

$$\sqrt{x^2+y^2}=ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

如果写成极坐标形式，不难看出等角轨线为对数螺线 $\rho=ce^{\frac{\theta}{k}}$（图1.21）.

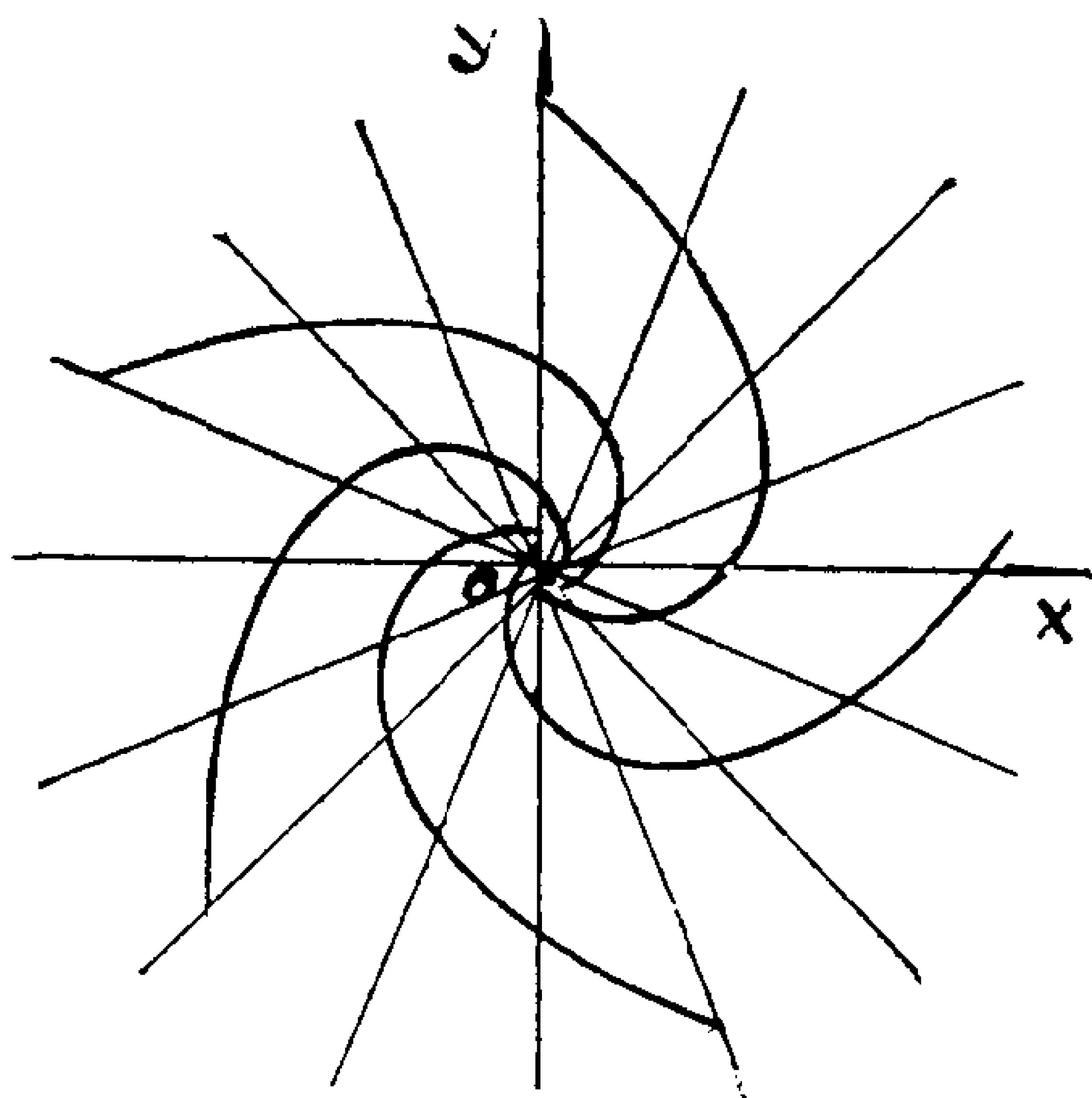


图 1.21

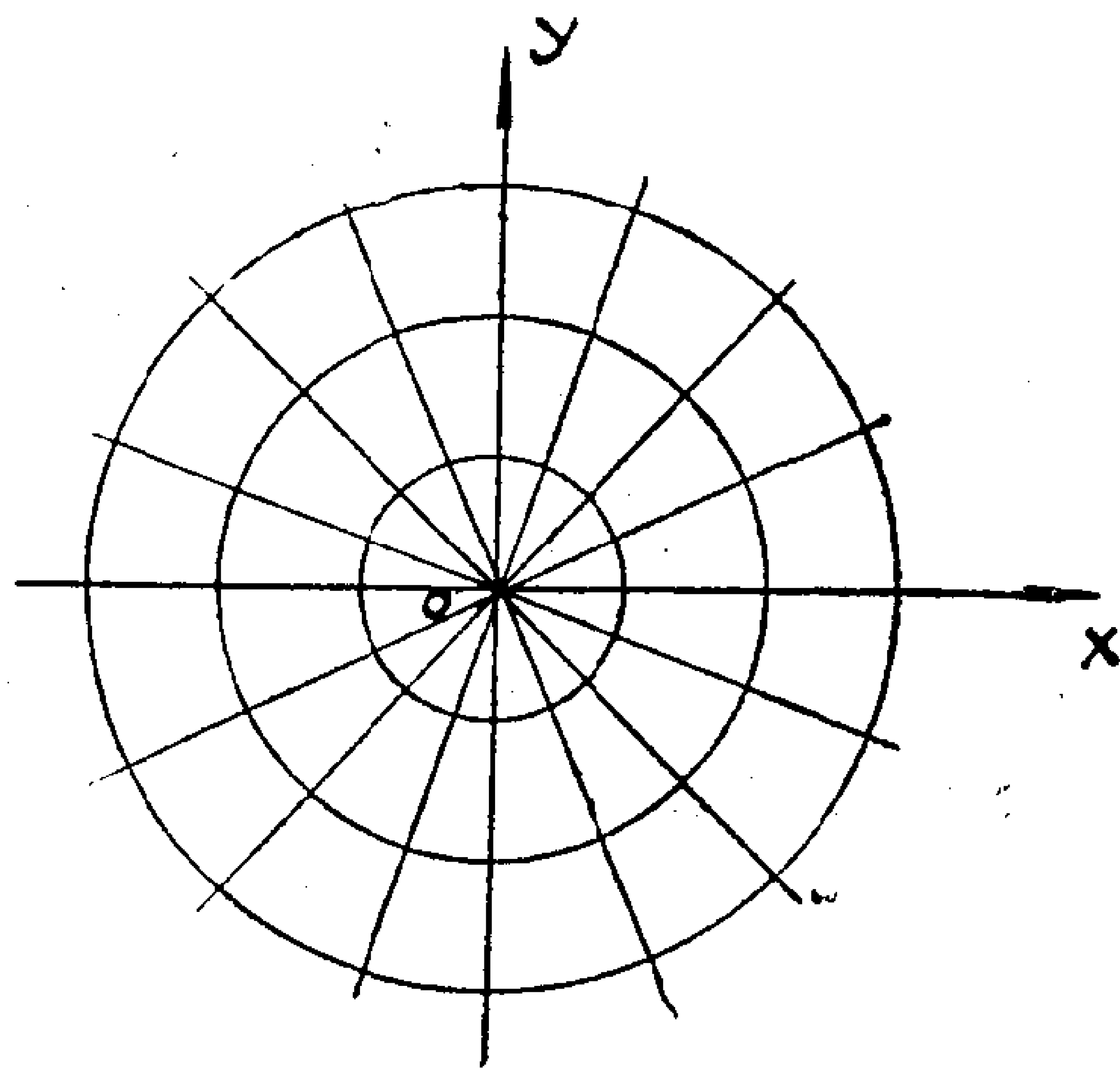


图 1.22

如果 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，由（1.61）可知，正交轨线的微分方程为

$$-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{y}{x}$$

即

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

或

$$xdx+ydy=0.$$

故正交轨线为同心圆族 $x^2+y^2=c^2$（图1.22）.

3°. 在动力学中的应用

动力学是微分方程最早期的泉源之一. 前面已经说过，动力学的基定定律是牛顿第二定律

$$f=ma.$$

它也是用微分方程来解决动力学的基本关系式. 它的右端明显地含有加速度 a，它恰为位移对时间的二阶导数. 要列出微分方程的关键就在于找到外力 f 和位移及其对时间的导数——速度的关系. 只要找到这个关系，就可以由 $f=ma$ 列出微分方程了.

在求解动力学问题时，要特别注意力学问题中的定解条件，如初始条件等.

例4. 物质由高空下落，除受重力作用外，还受到空气阻力的作用. 在速度不太大的情况下（低于音速的4/5），空气阻力可看做与速度的平方成正比. 试证明在这情况下，落体存在极限速度.

解. 设物体质量为m，空气阻力系数为k，又设时刻t，物体的下落速度为v，于是在时刻t，物体所受的力为

$$f=mg-kv^2.$$

于是，根据牛顿第二定律可列出微分方程

$$m\frac{dv}{dt}=mg-hv^2. \tag{1.62}$$

因为是自由落体，所以有

$$v(0)=0. \tag{1.63}$$

解（1.62），由（1.63）有

$$\int_0^v\frac{mdv}{mg-kv^2}=\int_0^t dt,$$

积分得

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{kg}}\ln\frac{\sqrt{mg}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg}-\sqrt{k}\,v}=t,$$

或

$$\ln\frac{\sqrt{mg}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg}-\sqrt{k}\,v}=2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t.$$

解出v，得

$$v=\frac{\sqrt{mg}\left(e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}-1\right)}{\sqrt{k}\left(e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+1\right)}.$$

当$t\to+\infty$时，有

$$\lim_{t\to+\infty}v=\sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

根据测定，$k=\alpha\rho s$，其中α为与物体形状有关的常数；ρ为介质密度；s为物体在地面上的投影面积.

以跳伞为例. 设$m=75$公斤，大致有

$\alpha=0.63$，$s=0.33$米^2，$\rho=\frac{1}{8}$公斤·秒^2/米^4. 于是，跳伞员在开伞前的极限速度约为54米/秒.

例5. 一质量为m的物体，以初速v_0. 垂直上抛. 设空气阻力与速度成正比，比例系数为k. 试证明质点所达到的最大高度为

$$\frac{mv_0}{k}-\frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1+\frac{kv_0}{mg}\right).$$

解. 由牛顿第二定律，可列出方程

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-kv. \tag{1.64}$$

设 s 为物体的高度，则有

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot v.$$

于是（1.64）化为

$$vm\frac{dv}{ds}=-mg-kv. \tag{1.65}$$

设地面坐标为 0，向上为正，于是所求问题满足初始条件

$$s(0)=0,\ v(0)=v_0. \tag{1.6}$$

解（1.64），有

$$\int_{v_0}^{v}\frac{mv}{mg+kv}dv=-\int_0^s ds.$$

积分后有

$$s=\frac{m}{k}(v_0-v)-\frac{m^2g}{k^2}\ln\frac{mg+kv_0}{mg+kv}.$$

当 $v=0$ 时，物体达到最大高度．于是最大高度为

$$s=\frac{mv_0}{k}-\frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1+\frac{kv_0}{mg}\right).$$

4°．流体混合问题．

中学代数中有这样的一类问题：某容器中装有浓度为 c_1 的含某种物质 A 的液体 v 升．从其中取出 v_1 升后，加入浓度为 c_2 的液体 v_2 升，试求混合后的液体的浓度以及物质 A 的含量．这类问题用初等代数就可以解决了．但是，在生产中还经常碰到如下的问题：如图1.23，容器内装有含物质 A 的流体．设时刻 $t=0$ 时，流体体积为 v_0．物质 A 的质量为 x_0（浓度当然也就知道了）．今以速度 v_2（单位时间的流量）放出流体，而同时又以速度 v_1 注入浓度为 c_1 的流体．今求时刻 t 时容器中物质 A 的质量及流体的浓度．这类问题称为流体混合问题．它是不能用初等数学解决的，必须用微分方程来计算．

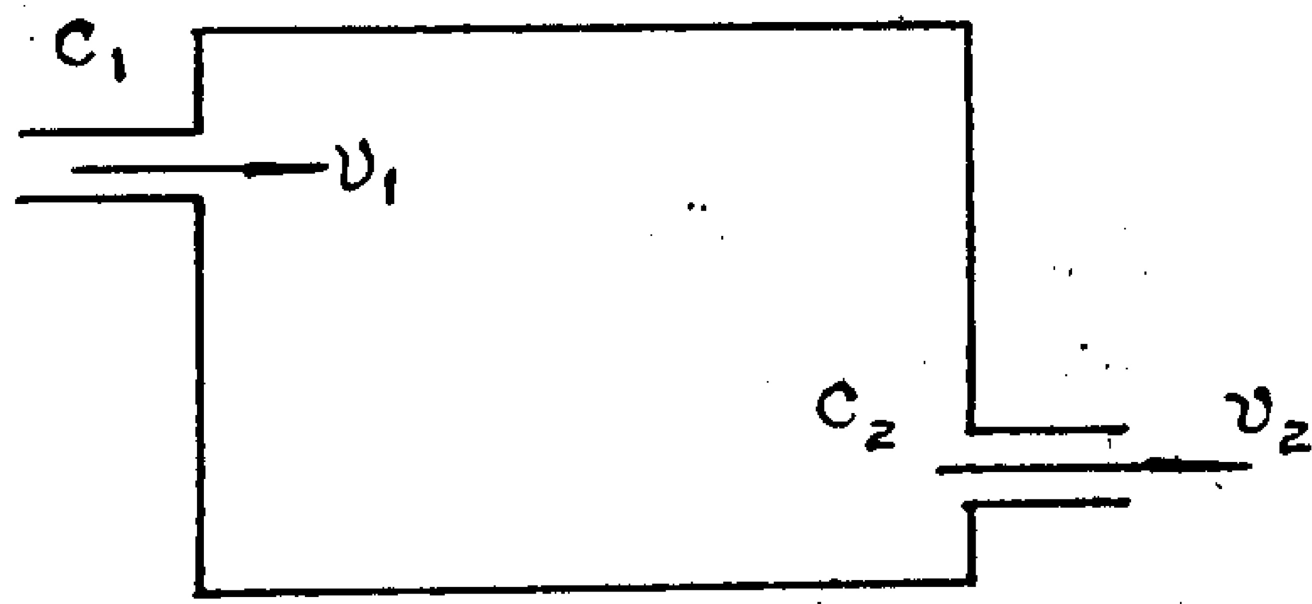


图 1.23

首先，我们用微元法来列方程．设在时刻 t，容器内物质 A 的质量为 $x=x(t)$，浓度为 c_2．经过时间 dt 后，容器内物质 A 的质量增加 dx．于是，有关系

$$dx=c_1v_1dt-c_2v_2dt=(c_1v_1-c_2v_2)dt.$$

因为

$$c_2=\frac{x}{v_0+(v_1-v_2)t},$$

代入上式有

$$dx=\left(c_1v_1-\frac{xv_2}{v_0+(v_1-v_2)t}\right)dt,$$

或

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{v_2}{v_0+(v_1-v_2)t}\cdot x+c_1v_1.$$

这是一个线性方程，所求物质A在t时刻的质量，即上述方程满足初始条件

$$x(0)=x_0$$

的解.

例6. 一容器内盛盐水100升，其中含盐50克. 现以3升/分的流速向容器内注入含盐2克/升的盐水. 设混合均匀，同时又以流速2升/分流出容器. 试求30分钟后，容器内所含的盐量.

解. 设时刻t容器内含盐$x(t)$克. 于是，有方程

$$dx=6\,dt-\frac{2x}{100+t}dt.$$

初始条件为

$$x(0)=50.$$

化简后，方程为线性方程

$$\frac{dx}{dt}+\frac{2}{100+t}x=6.$$

其通解为

$$x=2(100+t)+c(100+t)^{-2}.$$

以$x(0)=50$代入，得

$$c=-150\times100^2.$$

初值解为

$$x=2(100+t)-\frac{150\times100^2}{(100+t)^2}.$$

所以，当$t=30$时，有

$$x=171\text{克}.$$

例7. 某厂房容积为$45\times15\times6$米^3. 测定空气中含有0.2%的CO_2. 开动通风设备，以360米^3/秒的速度输入含有0.05%的CO_2的新鲜空气，同时又排出同等数量的室内空气. 问30分钟后室内所含CO_2的百分比.

解. 设在时刻t，车间内CO_2的百分比为$x(t)\%$. 当时间经过dt之后，室内CO_2的改变量为

$$45\times15\times6\times dx\%=360\times0.05\%\times dt-360\times x\%\times dt.$$

于是有关系

$$4050dx=360(0.05-x)dt,$$

或

$$dx = \frac{4}{45}(0.05 - x)\,dt,$$

初始条件为

$$x(0) = 0.2.$$

将方程分离变量并积分，初值解满足

$$\int_{0.2}^{x} \frac{dx}{0.05 - x} = \int_0^t \frac{4}{45}\,dt.$$

求出 x，有

$$x = 0.05 + 0.15\,e^{-\frac{4}{45}t}.$$

以 $t = 30$分$=1800$秒代入，有

$$x \doteq 0.05.$$

即开动通风设备30分钟后，室内 CO_2 的含量接近 0.05%，基本上已是新鲜空气了.

习　题 1.9

1．求抛物线族 $y = ax^2$ 的正交轨线.

2．求曲线族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + \lambda} = 1$ 的正交轨线，其中 λ 为参数.

3．求曲线，由原点到此曲线任一点切线的距离，为此点向径长度的 k 倍.

4．若由二定点到曲线任一点切线的距离之积，为一常数，求此曲线.

5．一质点沿 x 轴运动，在运动过程中只受到一个与速度成正比的反力的作用．设它从原点出发时，初速为10米/秒，而当它到达坐标为 2.5 米的点时，其速度为 5 米/秒，求质点到达坐标为 4 的点时的速度.

6．重量为 1000 公斤的物体，在水中由静止开始下沉，在下沉过程中只受两个力，一个是浮力为 200 公斤，另一为水的阻力，其数量为 $100v$ 公斤（其中 v 为下沉速度，单位为米/秒），求 5 秒后物体下沉的距离．并求下沉的极限速度.

7．重为 100 公斤的物体，在和水平面成 30° 的斜面上由静止状态下滑，如果不计摩擦，试求

1）物体运动的微分方程，

2）求 5 秒后物体下滑的距离，以及此时的速度和加速度.

8．一容器盛盐水 100 升，其中含盐 50 克．现以含盐 2克/升的盐水，以 3升/分的速度注入容器内，设流入的盐水与原有的盐水因搅拌而成为均匀的混合物．同时此混合物又以流速为 2升/分流出，试求 30 分钟后，容器内所含的盐量.

9．按牛顿冷却定律：物体在空气中冷却的速度与物体温度和空气温度之差成正比，已知空气温度为 30℃，而物体在 15 分钟内从 100℃ 冷却到 70℃，求当物体冷却到 40℃ 时所需的时间.

§1.10 几种可降阶的高阶方程

本节要介绍几种高阶常微分方程的解法，这些解法的基本思想就是把高阶方程通过某些变换降为较低阶的可求解的方程．这种思想与代数中某些特殊高次方程的解法颇有类似之处，请读者注意体会．

1°．方程 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots\cdots, y^{(n)}) = 0$ ． (1.66)

方程的特点是出现的最低阶导数为 $y^{(k)}$．这时，只要令

$$y^{(k)} = z,$$

(1.66) 就化成

$$F(x, z, z', \cdots\cdots, z^{(n-k)}) = 0 . \tag{1.67}$$

如果 (1.67) 能求出通解

$$z = z(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}),$$

则由

$$y^{(k)} = z(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$$

积分 k 次，就可以求出 y 来了．

例1. 求解

$$\frac{d^5y}{dt^5} - \frac{1}{t}\frac{d^4y}{dt^4} = 0 .$$

解． 令 $z = \frac{d^4y}{dt^4}$，则有

$$\frac{dz}{dt} - \frac{z}{t} = 0 ,$$

通解为

$$z = ct,$$

从而

$$\frac{d^4y}{dt^4} = ct,$$

积分四次，得到原方程的通解

$$y = c_1t^5 + c_2t^3 + c_3t^2 + c_4t + c_5 .$$

例2. 求悬链线方程．

如图1.24，有一完全柔软的质量均匀的线，悬挂在 A, B 两点，在重力作用下处于平衡状态．试求这曲线的方程式 $y = y(x)$．

解． 这个问题是历史上的一个名题．最初在 1690 年由詹姆斯·贝努利提出来的．他自己以及有一些人（例如著名的迦里略（*Galileo*））曾猜想这条曲线是抛物线．但后来有人发现不对．最后由詹·贝努利的弟弟约翰·贝努利解决了．莱布尼兹（***Leibniz***）把它定名为**悬链线**．它在工程中应用很广泛．下面就来求它的方程．

设 ρ 为线密度（即单位长度的质量）．以 $T(x)$ 表示曲线在 $P(x, y)$ 处的张力，在

曲线上任取一小段PQ，设Q的横坐标为$x+dx$，由平衡条件在水平方向有

$$T(x)\cos\theta(x)=T(x+dx)\cos\theta(x+dx),$$

其中θ为曲线切线与ox轴的夹角．于是，在悬链线上任一点，其水平张力为常数，即

$$T(x)\cos\theta(x)=H\ (\text{常量})．$$

再看PQ在垂直方向的平衡条件，得

$$H\operatorname{tg}\theta(x+dx)=H\operatorname{tg}\theta(x)+\rho ds,$$

即

$$y'(x+dx)-y'(x)=\frac{\rho}{H}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

左端去掉高级无穷小，即得方程

$$y''=\frac{\rho}{H}\sqrt{1+y'^2}.$$

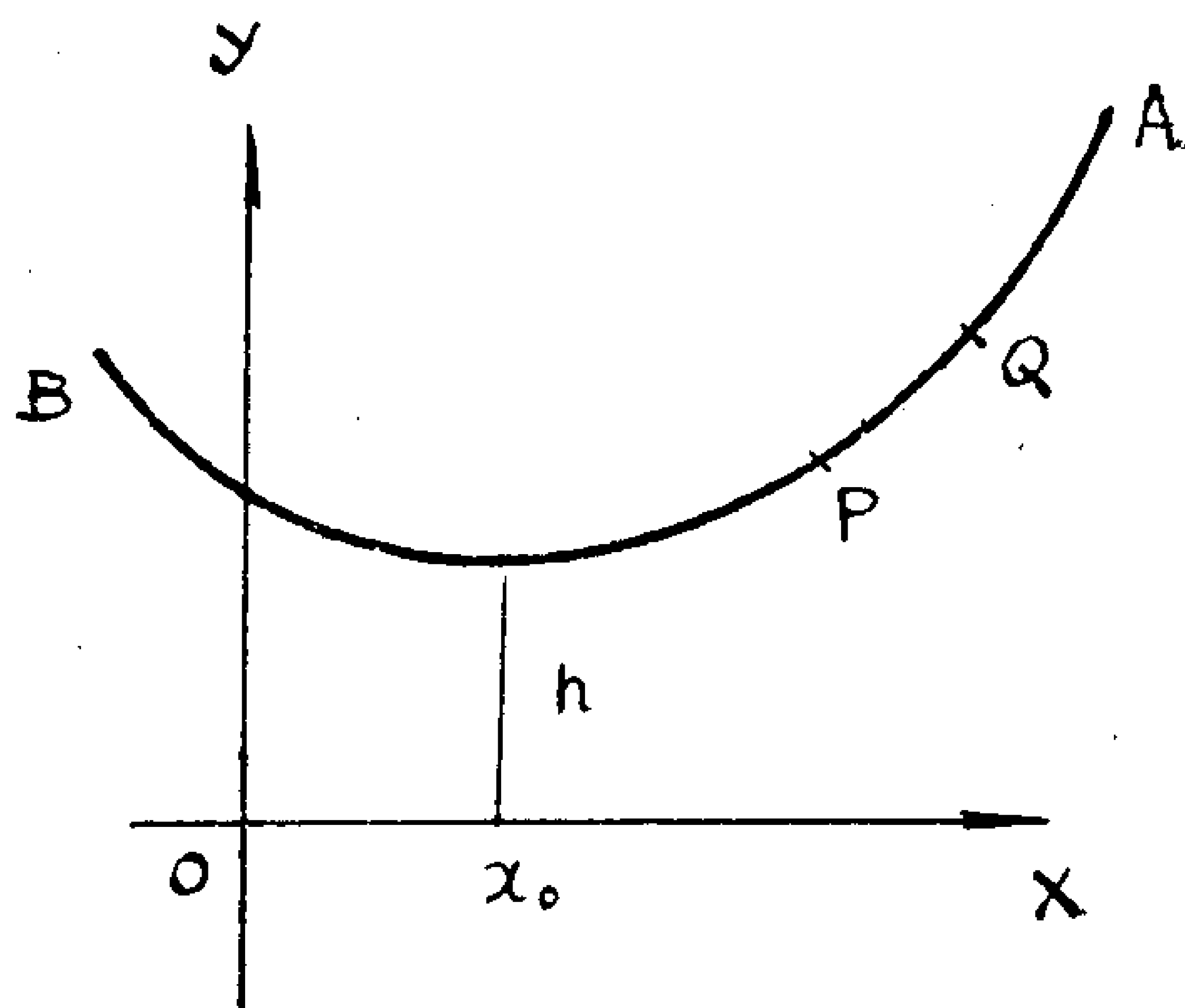


图 1.24

这就是悬链线的微分方程．

令$y'=z$，上式化为

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\rho}{H}\sqrt{1+z^2}.$$

分离变量得

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{\rho}{H}dx.$$

积分之，得

$$\ln(z+\sqrt{1+z^2})=\frac{\rho}{H}(x-c_1),$$

或

$$z+\sqrt{1+z^2}=e^{\frac{\rho}{H}(x-c_1)}.$$

解出有

$$y'=z=sh\frac{\rho}{H}(x-c_1).$$

再积分一次，得

$$y=\frac{H}{\rho}\operatorname{ch}\frac{\rho}{H}(x-c_1)+c_2.$$

设悬链线最低点的横坐标为x_0，纵坐标为h，则有初始条件

$$y(x_0)=h,\quad y'(x_0)=0.$$

代入$y(x)$，得

$$c_1=x_0,\quad c_2=h-\frac{H}{\rho}.$$

于是悬链线的方程为

$$y=\frac{H}{\rho}\operatorname{ch}\frac{\rho}{H}(x-x_0)+h-\frac{H}{\rho}.$$

悬链线在高压线架设中常应用，设两等高铁塔间的距离为 $2l$，弛度为 f，试求导线中的水平张力H．如图1.25建立坐标系．则导线方程为

$$y=\frac{H}{\rho}\operatorname{ch}\frac{\rho}{H}x-\frac{H}{\rho}.$$

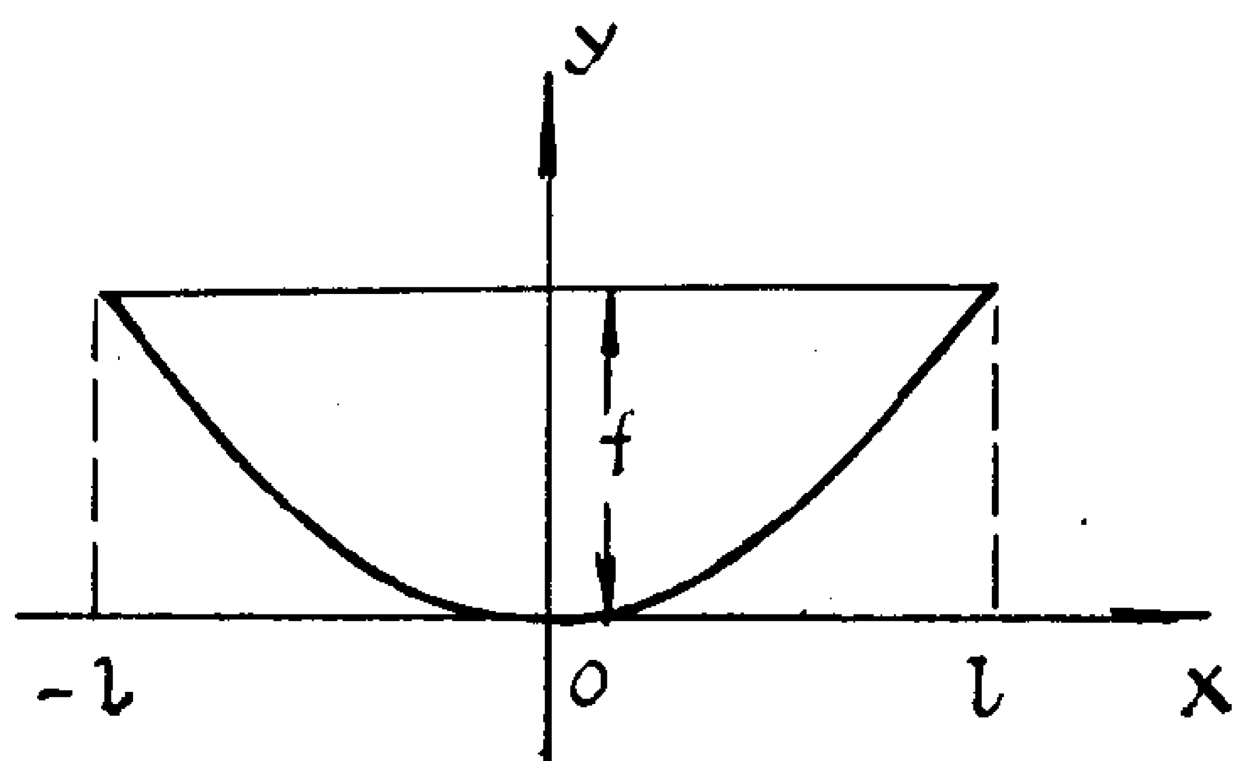


图 1.25

因为 $y(l)=f$，故有

$$f=\frac{H}{\rho}\operatorname{ch}\frac{\rho}{H}l-\frac{H}{\rho},$$

或

$$\operatorname{ch}\frac{\rho l}{H}=\frac{\rho f}{H}+1.$$

令 $u=\frac{\rho l}{H}$，则上式变为

$$\operatorname{ch}u=\frac{f}{l}\cdot u+1.$$

这是一个超越方程，其近似解设为 u_0，则有

$$H\doteq\frac{\rho l}{u_0}.$$

还要指出一点，就是在悬链线方程

$$y=\frac{H}{\rho}\operatorname{ch}\frac{\rho}{H}x-\frac{H}{\rho}$$

中，如果 x 很小，则有

$$\operatorname{ch}\frac{\rho}{H}x\doteq 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{H^2}x^2.$$

于是，悬链近似于

$$y=\frac{\rho}{2H}x^2.$$

因此，悬链线在其顶点处近似于一条抛物线．在工程中就经常用抛物线来代替悬链线．

2°．方程 $F(y,y',\cdots,y^{(n)})=0$．

方程的特点是不含自变量 x．这时，总可以利用代换 $y'=p$，使方程降低一阶．以二阶方程

$$F(y,y',y'')=0 \tag{1.67}$$

为例．

令　$y'=p$，于是有

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

代入（1.67），就有

$$F\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

这是一个关于 p 的一阶方程．如它可求解得 $p=p(y,c)$，再由

$$y'=p=p(y,c)$$

求 y．

例3． 设地球质量为M，万有引力常数为G，地球半径为R．今有一质量为m的火箭，由地面以初速 $v_0=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ 垂直向上发射，试求火箭高度与时间的关系．

解．火箭所受的地心吸引力为

$$f=-\frac{GMm}{(R+r)^2}.$$

由牛顿第二定律，有关系

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{GMm}{(R+r)^2}$$

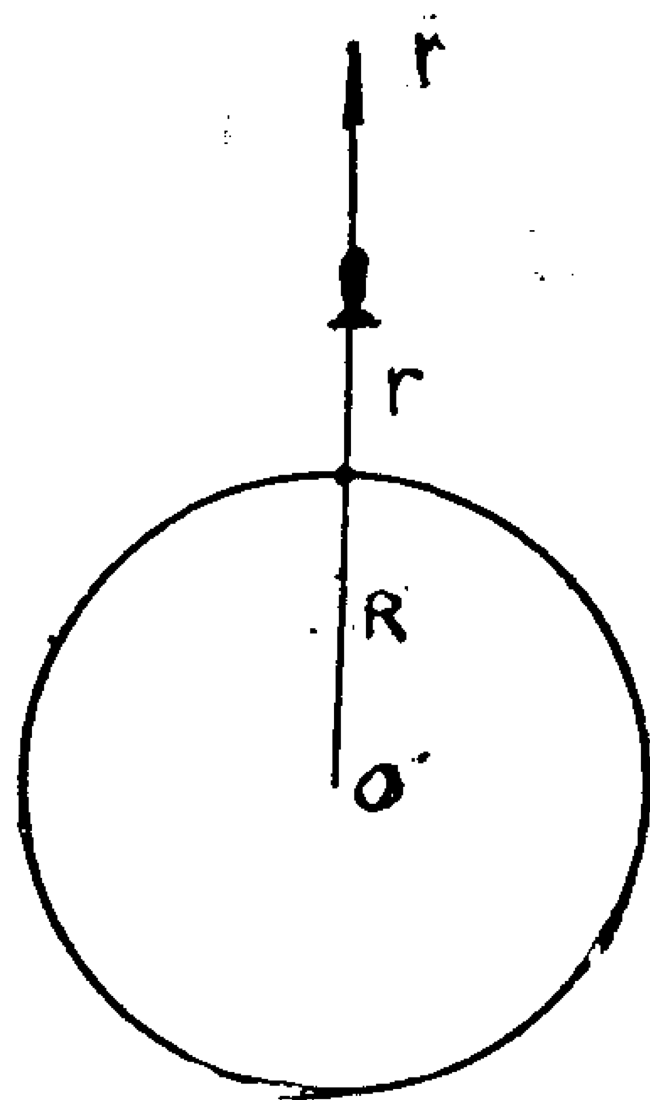


图 1.26

于是，得到方程

$$\ddot{r}=\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{GM}{(R+r)^2}.$$

令 $\dot{r}=v$，则有 $\ddot{r}=v\frac{dv}{dr}$．原方程化成

$$v\frac{dv}{dr}=-\frac{GM}{(R+r)^2}$$

积分后得到

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{GM}{R+r}+c.$$

以初始条件 $v(0)=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$，$r(0)=0$ 代入，得到方程

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{GM}{R+r},$$

或

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{GM}{R+r}}.$$

积分后得

$$\frac{2}{3}(R+r)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2GM}\,t+c.$$

以初始条件 $r(0)=0$ 代入，得 $c=\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}$．所以高度与时间的关系为

$$\frac{2}{3}(R+r)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2GM}\,t+\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}.$$

由此可解出 r 来．

3°．恰当导数方程．

这类方程的解法与全微分方程的解法相类似．

假如方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.8}$$

的左端恰为某一函数$\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$对$x$的导数，则方程可化为

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=0.$$

于是，方程显然可降低一阶，成为

$$\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=c.$$

之后再设法求解这个方程.

例4. 求解 $yy''+y'^2=0$.

解. 易于将方程化为

$$\frac{d}{dx}(yy')=0.$$

故有

$$yy'=c_1.$$

即

$$ydy=c_1dx.$$

，积分后即得通解

$$y^2=c_1x+c_2.$$

例5. 求解 $yy''-y'^2=0$.

解. 先将两端同乘不为0的因子$1/y^2$，则有

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right)=0,$$

故 $y'=cy$，从而通解为

$$y=c_1e^{cx}.$$

这一段解法的技巧性较高，关键是配导数的方法.

习 题 1.10

求解下列方程

1. $(xy''-y'')^2=y''^2+1$
2. $xy''+(x^2-1)(y'-1)=0$
3. $a^2y''^2=(1+y'^2)^3$
4. $yy''-y'^2-y^2y'=0$
5. $yy''+y'^2+1=0$
6. $3y'^2-y'y''=0$
7. $yy''-y'^2-6xy^2=0$
8. $x^2yy''-x^2y'^2-4xyy'+8y^2=0$
9. $(y-x)y''+y'^2-2y'=1-\sin x$
10. $(x+y^2)y''+6yy'y''+3y''+2y'^3=0$
11. $x^2yy''+(xy'-y)^2=0$ (提示：令 $y=xz$)
12. $\sin^2xy''-2y=0$ (提示：令 $\operatorname{ctg}x=z$)
13. $x(yy''+y'^2)+3yy'=2x^3$ (提示：令 $y^2=z$)

§1.11 微分方程组的初等积分法

在实际问题中经常要求解含有几个未知函数的微分方程组．例如，若已知在空间运动的质点 $p(x,y,z)$ 的速度与时间 t 及点的坐标 (x,y,z) 的关系为

$$\begin{cases} v_x = f_1(t,x,y,z) \\ v_y = f_2(t,x,y,z) \\ v_z = f_3(t,x,y,z) \end{cases}$$

且质点在时刻 t_0 经过点 (x_0,y_0,z_0)，求该质点的运动轨迹．

这个问题其实就是求微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = f_3(t,x,y,z) \end{cases}$$

的满足初始条件

$$x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=y_0,\quad z(t_0)=y_0$$

的解 $x(t)$，$y(t)$，$y(t)$．

含有 n 个未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一阶方程组的一般形状为：

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n). \end{cases} \tag{1.68}$$

所谓方程组（1.68）在 $[a,b]$ 上的**一个解**，是这样的一组函数

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots\cdots,\ y_n(x),$$

使得在 $[a,b]$ 上有恒等式

$$\frac{dy_i(x)}{dx} \equiv f_i(x, y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots\cdots,\ y_n(x)).$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

含有 n 个任意常数 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n$ 的一组解

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x,c_1,c_2,\cdots,c_n), \\ y_2 = \varphi_2(x,c_1,c_2,\cdots,c_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \varphi_n(x,c_1,c_2,\cdots,c_n). \end{cases} \tag{1.69}$$

称为（1.68）的**通解**．通解的隐式表达式

$$
\begin{cases}
\Phi_1(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;\ c_1,c_2,\cdots,c_n)=0,\\
\Phi_2(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;\ c_1,c_2,\cdots,c_n)=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Phi_n(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;\ c_1,c_2,\cdots,c_n)=0.
\end{cases}
\tag{1.70}
$$

称为（1.68）的**通积分**.

如前面看到的，经常还要求满足初始条件

$$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\cdots\cdots,y_n(x_0)=y_{n0}$$

的**初值解**. 如果通解或通积分已经求得而要求初值解，和一阶方程式一样，可以把初始条件代入（1.69）或（1.70），确定出 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，再代入（1.69）或（1.70），即得所求的初值解.

下面介绍两种求解方程组的初等解法. 这两种方法的基本思想与代数联立方程组的解法颇为相似. 例如对于方程组

$$
\begin{cases}
x^2+y^2=a,\\
xy=b.
\end{cases}
$$

可以用代入消去法，把它化成**高次**方程式来求解；也可用所谓"组合法"，对方程组进行某些运算，把它化成新的易求解的方程组

$$
\begin{cases}
(x+y)^2=a+2b\\
(x-y)^2=a-2b
\end{cases}
$$

来求解. 一阶微分方程组也有化为**高阶**方程式法与"可积组合法". 从这里又可以看出，在高等数学与初等数学之间有许多基本思想是一脉相承的. 应当在中学阶段就注意培养正确的数学方法.

1°. 化高阶方程式法.

先看一个例题.

例1. 求解方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt}=y,\\
\dfrac{dy}{dt}=x.
\end{cases}
$$

解. 以第一式代入第二式，即得关于 x 的二阶方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x.$$

用降阶法可求得

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t},$$

及

$$y=\frac{dx}{dt}=c_1e^t-c_2e^{-t}.$$

为把方程组（1.68）化为高阶方程式求解，如上例所示，其办法是：对方程组（1.68）进行适当的进算，仅保留一个未知函数，消去其它未知函数，这样就得到一个

高阶方程式．积分这一高阶方程式，求出所保留的未知函数，而其余的未知函数可以不经过积分而求得．现以三个未知函数的情况予以说明．

考虑方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,y_3)\ ,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=f_2(x,y_1,y_2,y_3)\ ,\\ \dfrac{dy_3}{dt}=f_3(x,y_1,y_2,y_3)\ .\end{cases}\qquad(1.71)$$

现保留未知函数y_1，为此，将第一个方程对x求导数，得

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial y_3}\cdot\frac{dy_3}{dx}$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot f_2+\frac{\partial f_1}{\partial y_3}\cdot f_3.$$

记为

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,y_3)\ .\qquad(1.72)$$

再将上式对x求导，并将（1.71）代入，得

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,y_3)\ .$$

从方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,y_3),\\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,y_3),\\ \dfrac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,y_3).\end{cases}\qquad(1.73)$$

中消去y_2及y_3，即得只含有未知数y_1的**三阶方程式**

$$\Phi\left(x,y_1,\frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2},\ \frac{d^3y_1}{dx^3}\right)=0\ .$$

如果能求得上面方程式的通解

$$y_1=\varphi_1(x,c_1,c_2,c_3).$$

将它代入（1.73)，由于左端全为已知，仅仅y_2和y_3为未知，从其中解y_2和y_3，设为

$$y_2=\varphi_2(x,c_1,c_2,c_3),$$
$$y_3=\varphi_3(x,c_1,c_2,c_3).$$

于是就得到了（1.71）的通解

$$\begin{cases}y_1=\varphi_1(x,c_1,c_2,c_3),\\ y_2=\varphi_2(x,c_1,c_2,c_3),\\ y_3=\varphi_3(x,c_1,c_2,c_3).\end{cases}$$

例2. 求解

$$\begin{cases}\dot{x}=2x-y+z,\\ \dot{y}=x+z,\\ \dot{z}=-3x+y-2z.\end{cases}$$

$\left(其中\ \dot{x}=\dfrac{dx}{dt},\quad \dot{y}=\dfrac{dy}{dt},\quad \dot{z}=\dfrac{dz}{dt}\right)$.

解. 对 t 微分第一式，得

$$\ddot{x}=2\dot{x}-\dot{y}+\dot{z}.$$

以原方程各式代入，并化简，得

$$\ddot{x}=-y-z.$$

将它再对 t 微分，并将原方程再代入，化简后得

$$\dddot{x}=2x-y+z.$$

由联立方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=2x-y+z,\\ \ddot{x}=-y-z,\\ \dddot{x}=2x-y+z.\end{cases}$$

解出 y 及 z，得

$$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}\dddot{x}-\dfrac{1}{2}\dot{x}+x,\\ z=\dfrac{1}{2}\dddot{x}-\dfrac{1}{2}\ddot{x}-x.\end{cases}$$

代入原方程第一式，得到新的三阶方程

$$\dddot{x}-\dot{x}=0.$$

令 $\dot{x}=u$，得新方程

$$\ddot{u}-u=0.$$

这个方程式可以用降阶法求解，而且以后还有较简便的方法．在此解法略．

2°．可积组合法．

为了了解这个方法的基本思想．我们先看看下面的例子，

例3. 求解

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x.\end{cases}$$

解. 先将第一式两端同乘 x，第二式两端同乘 y，然后相加，得到

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0,$$

或

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=0.$$

这个式子是**可积**的．积分后得到 x 与 y 的一个关系式

$$x^2+y^2=c_1.$$

为了解出 x 与 y 来，最好还能求得 x 与 y 的另一个关系式.

经过观察分析，可以用如下的方法.

将第一式两端乘 y，第二式两端 x，然后相减，得

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=x^2+y^2,$$

即

$$\frac{y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}}{x^2+y^2}=1.$$

或

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=1,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=t+c_2,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-t=c_2.$$

于是，得到方程组的解 $x(t)$ 及 $y(t)$ 所满足的方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=c_1, \\ \operatorname{arctg}\frac{x}{y}-t=c_2. \end{cases} \tag{1.73}$$

我们把函数 x^2+y^2 及 $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-t$ 称为原方程组的**首次积分**. 它们的特点是：将方程组的一个解 $x(t),y(t)$ 代入，它们将各自恒等于某一个常数.

方程组（1.73）是原微分方程组的通积分.

下面讨论一般的情形.

定义1.5. 函数 $\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 称为方程组（1.68）的一个**首次积分**，如果以(1.68)的任何一组解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 代入，使函数 $\Phi(x),y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))$ 恒等于某一常数（此常数一般说来与所取的解有关）.

设 $\Phi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为方程组(1.68)的 n 个首次积分，且有

$$\frac{D(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n)}{D(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\neq 0,$$

则称其为（1.68）的 n 个**独立的**首次积分.

不难看出，假如 $\Phi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为（1.68）的 n 个独立的首次积分，由隐函数存在定理可知，方程组

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=c_1, \\ \Phi_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=c_n. \end{cases}$$

为（1.68）的通积分，它所确定的隐函数

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x,c_1,c_2,\cdots,c_n), \\ y_2=\varphi_2(x,c_1,c_2,\cdots,c_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=\varphi_n(x,c_1,c_2,\cdots c_n). \end{cases}$$

就是（1.68）的通解.

因此，为了求解方程组（1.68），只须求出它的 n 个独立的首次积分就可以了.

但是，求 n 个独立的首次积分常常并不太容易，我们指出，求出一个首次积分就可以消去一个未知函数. 事实上，假如求得首次积分

$$\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=c_1,$$

就可以从其中解出一个未知函数，例如

$$y_1=q_1(x,y_2,\cdots,y_n,c_1).$$

代入（1.68）中，即可消去 y_1 了.

求首次积分的一个最基本的方法就是**可积组合法**. 就是对方程组进行某些运算，使能够得到可以积分的微分式，把这个式子积分即得到一个首次积分. 但是，可积组合法是多种多样的，有很多技巧，很难用一个简单的法则加以概括.

在一些实际问题（如几何问题）中，微分方程组（1.68）常常写成**对称**的形式

$$\frac{dy_1}{f_2}=\frac{dy_2}{f_2}=\cdots\cdots=\frac{dy_n}{f_n}=\frac{dx}{1}.$$

为了符号上的方便，我们写成

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\cdots\cdots=$$

$$=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

这样，各个变量就是“平等”的了. 对于这样的方程组，可以利用比例的许多性质（如合比定理，分比定理等）来求首次积分.

例4. 求解

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}.$$

解. 由后一等式，有

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

从而有

$$\frac{y}{z}=c_1.$$

于是得到一个首次积分

$$\Phi_1(x,y,z)=\frac{y}{z}.$$

利用合比定理，有

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{2xy},$$

或

$$\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{y}.$$

积分即得

$$\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln c_2y$$

即

$$x^2+y^2+z^2=c_2y,$$

或

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2.$$

于是又得到一个首次积分

$$\Phi_2(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{y}.$$

从而原方程的通积分为

$$\begin{cases}\dfrac{y}{z}=c_1,\\[2mm] \dfrac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2.\end{cases}$$

习　　题 1.11

1．解下列方程组

1）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-2x.\end{cases}$　　2）$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=2y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-2x.\end{cases}$

3）$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{z},\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{x}{y}.\end{cases}$　　4）$\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{z}.$

2．设 $G(x)=\int_0^x g(x)dx$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}G(x)=+\infty$，求证方程组

$$\begin{cases}x'=y,\\ y'=-g(x).\end{cases}$$

的任一解 $x(t)$，$y(t)$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 上有界.

3．在方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+f(x),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \varphi(y)$$

中．$f(x)$,$\varphi(y)$ 连续，且有

$$xf(x) < 0, \qquad (x \neq 0)$$
$$y\varphi(y) < 0. \qquad (y \neq 0)$$

试证方程的任一组解 $x(t)$，$y(t)$ 均有

$$\lim_{x \to +\infty} [x^2(t) + y^2(t)] = 0$$

§1.12 微分方程组在计算人造地球卫星轨道上的应用

在中学平面解析几何中，对二次曲线的研究占了大部分篇幅．为什么这样按排呢？这是根据实践的要求从历史上形成的．由于农业以及航海的需要，天文学曾经在一个时期（特别是18世纪）占着极其重要地位，人们很早就对星体(包括行星、慧星等)的轨道进行观测及研究，后来人们通过中心力场中质点运动的研究终于逐渐发现星体的轨道都是二次曲线，不外乎椭园、抛物线及双曲线三种．因而，二次曲线引起了人们的特别注意，而且它们在其它领域（如建筑业）中有广泛应用，于是这些曲线在以后就成了解析几何的主要研究对象．但是，这些古老的问题在进入宇宙航行时代的今天，又获得了新的意义．因为人造卫星也好，宇宙飞船也好，都服从关于中心力场的法则，因此它们的轨道也只能是二次曲线中的一种，只不过人造卫星是可以控制的，可以用初始发射速度来测定它的轨道的形状．我们这一节就根据不同的初始速度来研究人造卫星的轨道．学习这一节，除了学习微分方程的一些方法外，还可以加深对于二次曲线分类的了解．

1°．人造地球卫星运行轨道

从地球表面上一点P处，以初速度$\vec{v}_0$射出一个质量为m的物体，发射方向与水平方向的夹角$\alpha$$\left(\text{并设 } \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$．求该物体运动的轨道．

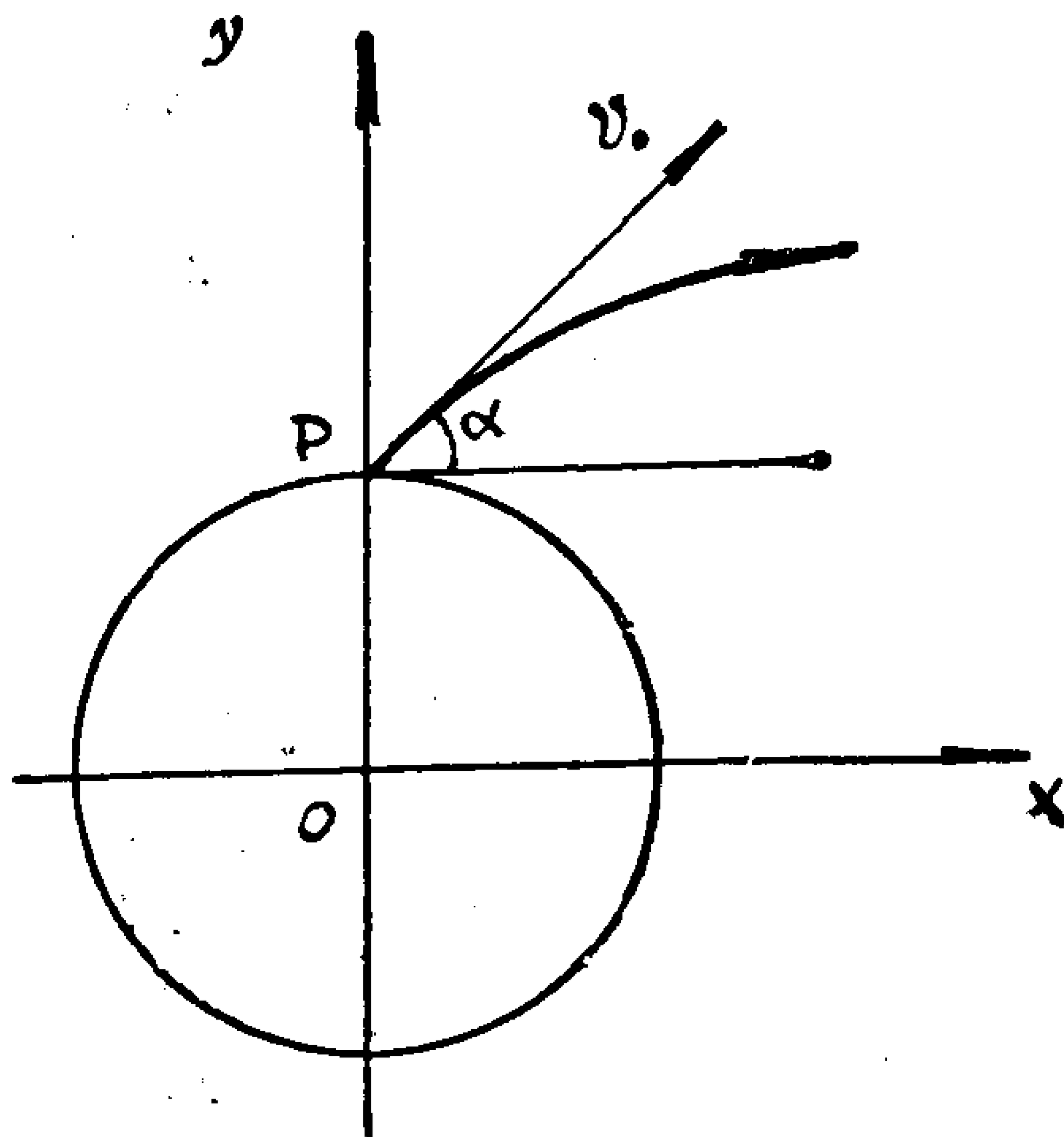


图 1.27

为建立运动方程，以通过发射点和地心的直线作为y轴，地心作为原点，x轴取在和发射方向同一平面内，取其正向使发射方向在第一象限内，如图 1.27

t 表示时间，并设在t时物体的运动坐标为（x，y），则由万有引力定律知道有一力$f \cdot \frac{mM}{x^2+y^2}$把物体拉向地心．该力在$x$方向和$y$方向的分力是

$$\frac{-fmM}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{和}\frac{-fmM}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

其中地球质量 $M=5.98\times10^{27}$ 克，而引力常数 $f=6.685\times10^{-23}$〔公里〕^{3}/〔克〕〔秒〕^{2}.

因此，由运动第二定律得到物体的运动方程：

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{fmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases} \tag{1.74}$$

这就是人造地球卫星的运动方程.

现在解方程组（1.74）.

（1.74）中第二式乘以 x，第一式乘以 y，然后两者相减，得

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

或

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0\,. \tag{1.75}$$

再由（1.74）第一式乘以 $\frac{dx}{dt}$，第二式乘以 $\frac{dy}{dt}$，并相加，得

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{fM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\left[x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right],$$

或写成

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=-\frac{fM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{dt}(x^2+y^2). \tag{1.76}$$

分别对（1.75）和（1.76）进行积分，得到下列一阶方程组

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}=c_1. & (1.77) \\ \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=\dfrac{2fM}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+c_2, & (1.78) \end{cases}$$

为了便于求解和讨论轨道的形状，换为极坐标：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，以及

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta,$$
$$dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta.$$

将以上各式代入方程组的（1.77）与（1.78）式中，得

$$\begin{cases} r^2\dfrac{d\theta}{dt}=c_1, & (1.79) \\ \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=\dfrac{2fM}{r}+c_2. & (1.80) \end{cases}$$

从（1.79）和（1.80）中消去 $\frac{d\theta}{dt}$，得

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}.$$

由于在开始发射时，距离与时俱增，所以

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}}. \tag{1.81}$$

为了求得轨道，将（1.81）和（1.79）联立，并消去 dt，得

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r^2}{c_1}\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}}, \tag{1.82}$$

解（1.82），即得极坐标形式的轨道方程.

现在解方程（1.82），为此，引入新变量 u，$r=\frac{1}{u}$，这时（1.82）化为

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{u^2c_1}\sqrt{c_2+fMu-c_1^2u^2}.$$

对上式分离变量，整理后可得：

$$d\theta=\frac{-c_1du}{\sqrt{c_2+2fMu-c_1^2u^2}}=\frac{-du}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2-\left(u-\frac{fM}{c_1^2}\right)^2}}.$$

当 $\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2>0$ 时，积分后可得

$$\theta=\arccos\left[\left(u-\frac{fM}{c_1^2}\right)\Big/\sqrt{\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2}\right]+c,$$

$$\frac{1}{r}=u=\frac{fM}{c_1}+\sqrt{\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2}\cos(\theta-c). \tag{1.83}$$

当 $\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2=0$ 时，$\frac{1}{r}=u=\frac{fM}{c_1^2}$ 是（1.82）的解，由（1.83）也可求得 $\frac{1}{r}=u=\frac{fM}{c_1^2}$，故（1.83）对于 $\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)\geqslant 0$ 均适用.

令

$$p=\frac{c_1^2}{fM}\text{（轨道参数）}, \tag{1.84}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{c_2c_1^2}{(fM)^2}}\text{（离心章）}. \tag{1.85}$$

这时由（1.83）可得出轨道方程

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}\quad(e\geqslant 0). \tag{1.86}$$

上述方程是二次曲线：椭园，双曲线、抛物线的极坐标的统一形式的方程.

方程（1.83）及（1.86）中的三个常数 c_1, c_2, c，取决于发射情况（即由初始条件决定）：当 $t=0$ 时，假定发射点是地面，即，

$$x=0，\quad y=R\ （地球半径）$$

亦即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$r=R$. 再由初速度得

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha.$$

将初始条件代入（1.77）及（1.78），得

$$c_1=-Rv_0\cos\alpha, \tag{1.87}$$

$$c_2=v_0^2-\frac{2fM}{R}. \tag{1.88}$$

再将初始条件：$t=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$r=R$，代入（1.86）式，得

$$R=\frac{p}{1+e\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-c\right)}=\frac{p}{1+e\sin c},$$

解得

$$\sin c=\frac{\dfrac{p}{R}-1}{e}. \tag{1.89}$$

由（1.85），（1.87）（1.88）并注意到（1.84）得

$$\begin{aligned} e^2&=1+\frac{c_2c_1^2}{(fM)^2}=1+\left(v_0^2-\frac{2fM}{R}\right)R^2v_0^2\frac{\cos^2\alpha}{(fM)^2}\\ &=\left(1-\frac{Rv_0^2\cos^2\alpha}{fM}\right)+\frac{R^2v_0^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{(fM)^2}\\ &=\left(1+\frac{p}{R}\right)^2+\frac{p^2}{R^2}\mathrm{tg}^2\alpha\geqslant\left(\frac{p}{R}-1\right)^2, \end{aligned} \tag{1.90}$$

即

$$\left|\frac{\dfrac{p}{R}-1}{e}\right|\leqslant 1,$$

因此，由（1.89）求得：

$$c=\arcsin\left[\frac{\dfrac{p}{R}-1}{e}\right].$$

2°. 轨道讨论——第一、第二宇宙速度

（1）如果轨道方程（1.86）中的 $e=0$，轨道为 $r=p$，则由（1.90）知

$$\frac{p}{R}=1，\ \mathrm{tg}\alpha=0,$$

即得 $\alpha=0$，$p=R$，故发射方向为水平方向，轨道是圆 $r=R$. 并由（1.89）和(1.87）得

$$v_0^2=\frac{fM}{R}.$$

$$v_0^2 \doteq \frac{6.685\times10^{-23}\times5.89\times10^{27}}{6370}〔公里/秒〕^2$$

$$=62.6〔公里/秒〕^2,$$

所以

$$v_0=7.9公里/秒.$$

这是第一宇宙速度.

因此，当沿水平方向初速度为第一宇宙速度时，物体正好绕地球作圆周运动，半径正好是R，这在实际上不可能，因为物体与地球距离为零，所以初速度必须超过第一宇宙速度才能成为人造地球卫星.

（2）如果轨道（1.86）中的 $e=1$，此时轨道

$$r=\frac{p}{1+\cos(\theta-c)}$$

是抛物线. 由（1.90）并注意到 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则有

$$v_0^2-\frac{2fM}{R}=0 \quad 或 \quad v_0^2=\frac{2fM}{R}.$$

由上式所求出的 v_0 是第一宇宙速度的$\sqrt{2}$倍，即得

$$v_0=11.2公里/秒.$$

这是第二宇宙速度.

由于抛物线是不封闭曲线，所以当 v_0 达到第二宇宙速度时，物体脱离地球引力.

（3）如果轨道方程（1.86）中的 $0<e<1$，此时轨道

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}$$

是椭圆，它是经过P点的椭圆，在P点的切线斜率是 $\operatorname{tg}\alpha$. 如果轨道上有一点与地球中心的距离小于R，则物体便落在地球上而不能完成椭圆轨道，也就是函数

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}$$

的最小值是R（因为开始时是 $r=R$). 因为 $|\cos(\theta-c)|\leqslant1$，所以这个函数的最小值等于$\frac{p}{1+e}$，因此，

$$\frac{p}{1+e}=R,\quad e=\frac{p}{R}-1,$$

由（1.90）知道，这仅当 $\alpha=0$，也就是仅当沿水平发射时才有可能使轨道不与地球相交（除发射点外）.

另一方面，由于 $e>0$，可知 $p>R$，即

$$R < p = \frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{fM} \leqslant \frac{R^2 v_0^2}{fM},$$

即

$$v_0 > \sqrt{\frac{fM}{R}} \text{（第一宇宙速度）}.$$

再由（1.90）和$e<1$，则有

$$v_0^2 - \frac{2fM}{R} < 0 \quad \text{或} \quad v_0^2 < \frac{2fM}{R},$$

即

$$v_0 < \sqrt{\frac{2fM}{R}} \text{（第二宇宙速度）}.$$

这说明了当初速度在第一，第二宇宙速度之间，沿水平方向发射时，我们才能得椭圆轨道.

在实际进行时，我们并不采用在地面上沿水平面向发射的方法，而是采用垂直向上后倾斜进入轨道的方法，其原因是空气阻力大，不但要消耗大量能量，而且时间长了还可能使火箭因摩擦生热而烧毁．所以需要尽快地离开大气层．而垂直向上飞行时，在大气层中停留的时间最短．不但这样，发射方向即使稍微偏离了水平方向，也不致使卫星落地，当然，速度可比第一宇宙速度稍微大些.

（4）如果轨道方程（1.86）中的$e>1$，此时轨道

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - c)}$$

是双曲线的一支．由（1.90），因$e>1$，则有

$$v_0^2 = \frac{2fM}{R} > 0 \quad \text{或} \quad v_0 > \sqrt{\frac{2fM}{R}} \text{（第二宇宙速度）}$$

我们现在证明，随时间增大，r永远增大.

在开始发射时，r总是增加的．如果它并非永远增加，则一定有一个值r取得极大值，并使$1+e\cos(\theta-c)$取极小值．这是一个连续函数，极小值是$1-e<0$．这是不可能的，因为$p>0$，这时r所取的极大值将为负值了．因此r必单调地增加.

这样物体就脱离地球引力沿双曲线轨道飞去，离地面越来越远，故当发射初速度v_0超过第二宇宙速度时，物体就不再能成为地球卫星了，而脱离地球引力成为宇宙飞船或绕太阳运动的人造卫星.

这时物体速度的平方

$$v^2 = \frac{2fM}{r} + c_2 = \frac{2fM}{r} + v_0^2 - \frac{2fM}{R} > v_0^2 - \frac{2fM}{R}, \tag{1.91}$$

也就是速度永远大于$\sqrt{v_0^2 - \frac{2fM}{R}}$并且越远越接近这个速度.

第一章 综合习题

求解下列方程，并求所指出的初值解：

1．$(y^2+xy^2)dx-(x^2+yx^2)dy=0$，　　$y(0)=0$，$y(1)=-1$

2．$y'+e^{x-y}=0$

3．$y'+x^2y=x^2$，　$y(1)=1$

4．$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

5．$x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$

6．$(2y+x+1)dy+(2y+x-1)dx=0$，　　$y(-1)=2$

7．$(y+2)dx=(2x+y-4)dy$

8．$\dfrac{dy}{dx}=2xy-x^2+x$，　$y(0)=0$

9．$\cos x\dfrac{dy}{dx}=y\sin x+\sin^2 x$

10．$dx+(x+y^2)dy=0$

11．$y^2+(1-2y)xy'=y^2y'$，$y(0)=1$

12．$y'+y\dfrac{d\varphi(x)}{dx}=\varphi(x)\dfrac{d\varphi dx}{dx}$，$\varphi(x)$是$x$的已知函数．

13．$xy'+y=xy^2\ln x$

14．$xy'=y+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

15．$y'=x^3y^3-xy$

16．$\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}-\dfrac{ydx-xdy}{x^2}=0$，　　$y(1)=1$

17．$(3x^3+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

18．$2y(x+y^2)dy=(x-y^2)dx$，　　$y(0)=1$

19．$ydy-xdy=x^2ydy$，　　$y(1)=2$

20．$\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0$，　$y(0)=3$

21．$y'=\dfrac{y}{x+y^3}$

22．$2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$，　　$y(0)=1$

23．$(x+1)\dfrac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$

24．$\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+x^2dx=0$

求解下列方程，并作积分曲线的图形：

25．$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

26．$y'=y^{\frac{1}{2}}$

27．$x\dfrac{dy}{dx}=y^2-y$

28．$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

29．设$y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$是线性非齐次分程的二个互异解．求证对此方程的任一解$y(x)$恒有

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=c,$$

其中c是常数。

试绘出下列分程所定义的方向场的等斜线：

30．$\frac{dy}{dx}=x^2-y^2$

31．$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{4}+y^2$

试绘出下列方程的积分曲线：

32．$\frac{dy}{dx}=\frac{x\cdot y}{|x\cdot y|}$

33．$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+|x|}{y+|y|}$

34．$\frac{dy}{dx}=|y|$，过 (0,0) 及过 (0,−1) 的积分曲线．

求解下列方程：

35．$y'^3-4yy'-xy'^2+4xy=0$

36．$y=a\sqrt{1+y'^2}$

37．$x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=a$

38．$xy'^2+2xy'-y=0$

39．$y'^3-y'e^{2x}=0$

40．$y=2xy'+\frac{x^2}{2}+y'^2$

41．$x=yy'+ay'^2$

42．$y=xy'+y^2\cdot y'^3$

43．$xy'^2-2yy'+2y=0$

44．$y'^3+y=xyy'$

求下列方程的奇解：

45．$y^2+y^2y'^2=2yy'+2x$

46．$y'^2-(x+1)y'+y=0$

47．$xy'^2-2yy'+4x=0$

48．证明共焦点且共轴的抛物线族 $y^2=4a(x+a)$ （a 为任意常数）是自己的正交轨线．

49．在通过原点的曲线上任取一点 (x,y)，过该点画平行于坐标轴的直线，它们与坐标轴围成一个矩形．试确定这样的曲线，它把矩形分成二部份，其中一部份面积是另一部份面积的三倍．

50．求一曲线，使在其上任一点 p 的法矩（由点 p 到过点 p 的曲线的法线与 x 轴的交点的矩离）等于该点到坐标原点的矩离．

51．摩托艇以10公里/小时的速度在静水上运行，全速时停止了发动机，过了 $t=20$ 秒钟后，艇的速度减到 $v_1=6$公里/小时．假定水的阻力与艇的运动速度成正比，试确定发动机停止2分钟后艇的速度，求发动机停止后艇所经过的距离．

52．一子弹以速度 $v_0=200$米/秒打进一块厚度为 $h=10$ 厘米的板，然后穿过它，以速度 $v_1=80$米/秒离开板，设板对于子弹运动的阻力和运动速度的平方成正比．问子弹穿过板的运动持续多少时间？

53．从容器中流出的液体，按着水力学中的定律，液体从距自由面深度为 h 的孔流出，它的流速是

$$v=\mu\sqrt{2gh}\text{ 厘米/秒},$$

其中 g 是重力加速度，μ 是液体的粘滞系数．

a）假定容器是直径为1米，高为15米的园柱形贮水器，并贮满水，现水从容器底部一个直径为0.05米的小孔流出，水的粘滞系数 $\mu=0.62$，试求水流尽的时间．

b）假定容器是高为10厘米，顶角$\alpha=60°$的圆锥形漏斗，漏斗下面有面积为0.5厘米^{2}的小孔，现贮满水，试求水流尽的时间.

54. 有一辆铁路用的油罐车．内装满煤油，油罐长为l，直径为D．由罐底部有一截面积为ω的排油口排油，试求煤油流尽的时间（如图1.28）．

如果$l=12$米，$D=2.6$米，$\omega=0.01$米^2，煤油粘滞系数$\mu=0.6$，计算流尽的的时间t．

55. 一质点在重力作用下，沿某曲线滑动，在任意相等的时间区间内，下降的高度都相等。求此曲线.

56. 自感现象的实验电路如图1.29．电路由灯泡，线圈和电池串联而成，并有两个

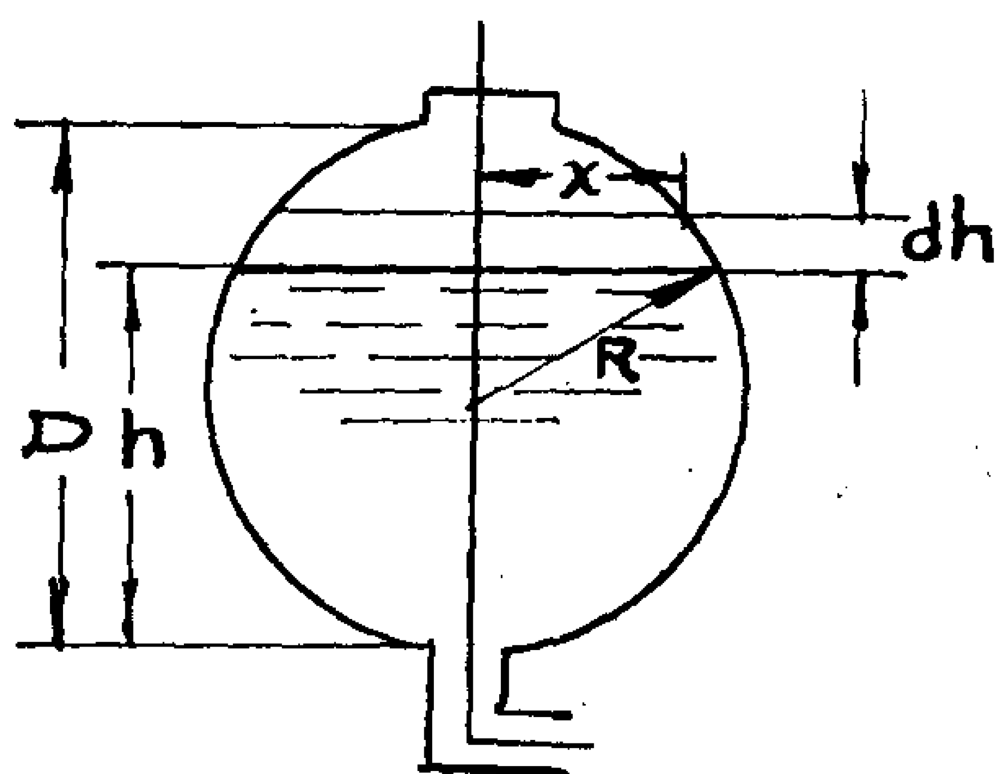


图 1.28

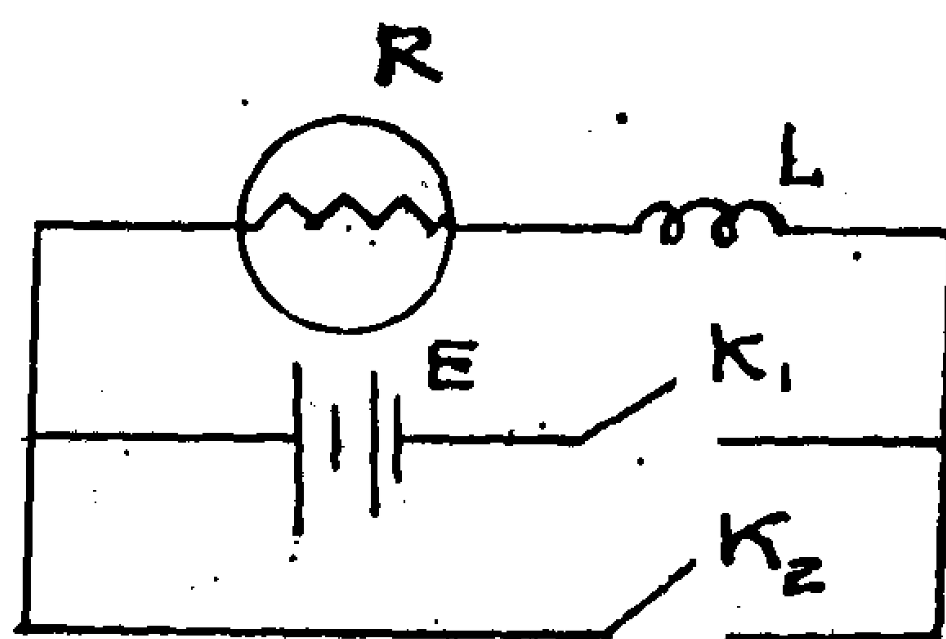


图 1.29

开关K_1和K_2．灯泡的电阻为R，它的自感系数可以略去，线圈由粗导线做成，匝数很多，它的自感系数为L，电阻可以略去，电池的电动势为E．

a）当开关K_1接通而K_2断开时，试求闭合电路K_1ERLK_1中电流变化规律，

b）当电路中电流强度达到稳定状态$\frac{E}{R}$时，将K_1断开，同时将K_2接通，试求迴路K_2RLK_2中电流变化规律.

c）试用灯泡的亮度变化说明（*a*），（*b*）问题中自感现象.

57. 如曲线的法线与向径所成的角，和法线与x轴所成的角相等．求此曲线.

58. 由原点至曲线任一点的切线的垂线之长，等于切点的横座标，求此曲线.

59. 若曲线的向径与切线之间的夹角，等于向径相角的$\frac{1}{2}$，试求此曲线，

60. 求下列曲线族：

1）$x^2+y^2=c^2$　　2）$xy=c$　　3）$y^2=2ax$

的正交轨线和等角轨线.

求解下列方程

61. $y''=\cos x$　　62. $xy''=y'\ln\frac{y'}{2}$

93· $y''(e^x+1)+y'=0$　　64. $xy'''-y''=6x^3$

65. $y'y''-3y'''=0$　　66. $yy''+y'^2=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=2$

67. $2y'''-3y''=0$；　$y(0)=-3$，$y'(0)=1$，$y''(0)=-1$

68. $yy''=y'(y'+1)$

69. $xy''=2yy'-y'$

70. $y(1-\ln y)y''+1(+\ln y)y'^2=0$

71. $xyy''-xy'^2=yy'$

72. $yy'+xyy''+xy'^2=x^3$

73. $yy''-y'^2=0$

74. 质量为m的物体从地面以初速v_0竖直上抛，假定空气阻力与速度平方成正比.

a）求物体上升的最大高度；

b）证明物体从最高处下落（共阻力仍与速度平方成正比）着地时的速度小于v_0.

c）证明物体下落返回地面所需时间比到达最高度所需的时间长.

75. 单摆运动. 设有质量为m的质点M，连接在一条长度为L，质量可忽略的线上，线的另一端固定. 将点M从平衡位置拉开，放开后由于重力的关系，质点M沿半径为L的园弧运动，在摆线与平衡位置所成的角度θ很小的情况下，试证θ是时间t的周期函数.

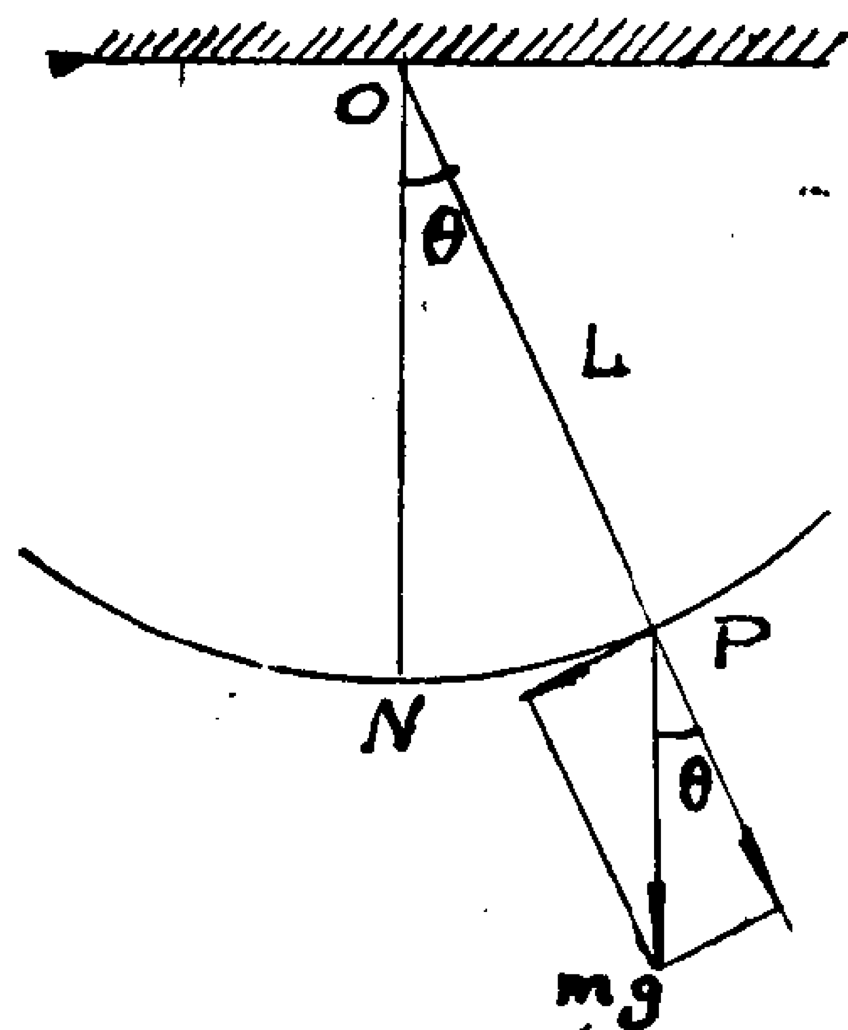


图 1.30

76. 敌机侵入我领空，以每小时200公里等速地沿水平直线飞行，当它飞临我某防空部队正上空时，此时飞机高度为10公里，我解放军立即发射追迹导弹一枚，以每小时1000公里等速地且随时均对准敌机向前飞行，问何时击中敌机？

求解下列微分方程组：

77. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dx}=3-x\end{cases}$

78. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z^2}{y}\\[2mm]\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y^2}{z}\end{cases}$

79. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y}{x-y}\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{x-y}\end{cases}$

80. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=xz\\[2mm]\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z}{t}-\dfrac{yz}{x}+\dfrac{6t}{x}\end{cases}$

81. $\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dy}{xz}=\dfrac{dz}{x-y}$

82. $\dfrac{dx}{1-y}=\dfrac{dy}{1+x}=\dfrac{dz}{z}$

83. $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{dz}{y-x}$

84. $\dfrac{dx}{x+y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{zdz}{y^2-2xy-x^2}$

第二章 变分法大意

变分法是一门研究极值的学科．对于极值我们是比较熟悉的．在中学代数里应用配方法求过二次函数的极值，在数学分析里也应用导数求过一般函数的极值．在工程实践中，除了求函数 $y=f(x)$的极值以外，还常常研究更为复杂的，从性质来看更为深刻的极值问题．

例如，在 xoy 平面上给定二点 $A(a_0,b_0)$ 和 $B(a_1,b_1)$．将连接A，B二点的一条光滑曲线 l，围绕 x 轴旋转一周，可以得到一个旋转曲面・易于看出，曲线不同，旋转曲面的面积也不一样．现在要问，当 l是什么曲线时，旋转曲面的面积为最小．

又如，在一铅直平面上，给定不在同一铅直线上的二点A，B．质点沿着过A，B二点的光滑曲线轨道 l下滑．由于下滑轨道 l不同，质点由A下滑到B所需时间也就不相同．今问 l 是什么曲线时，所需时间最短．

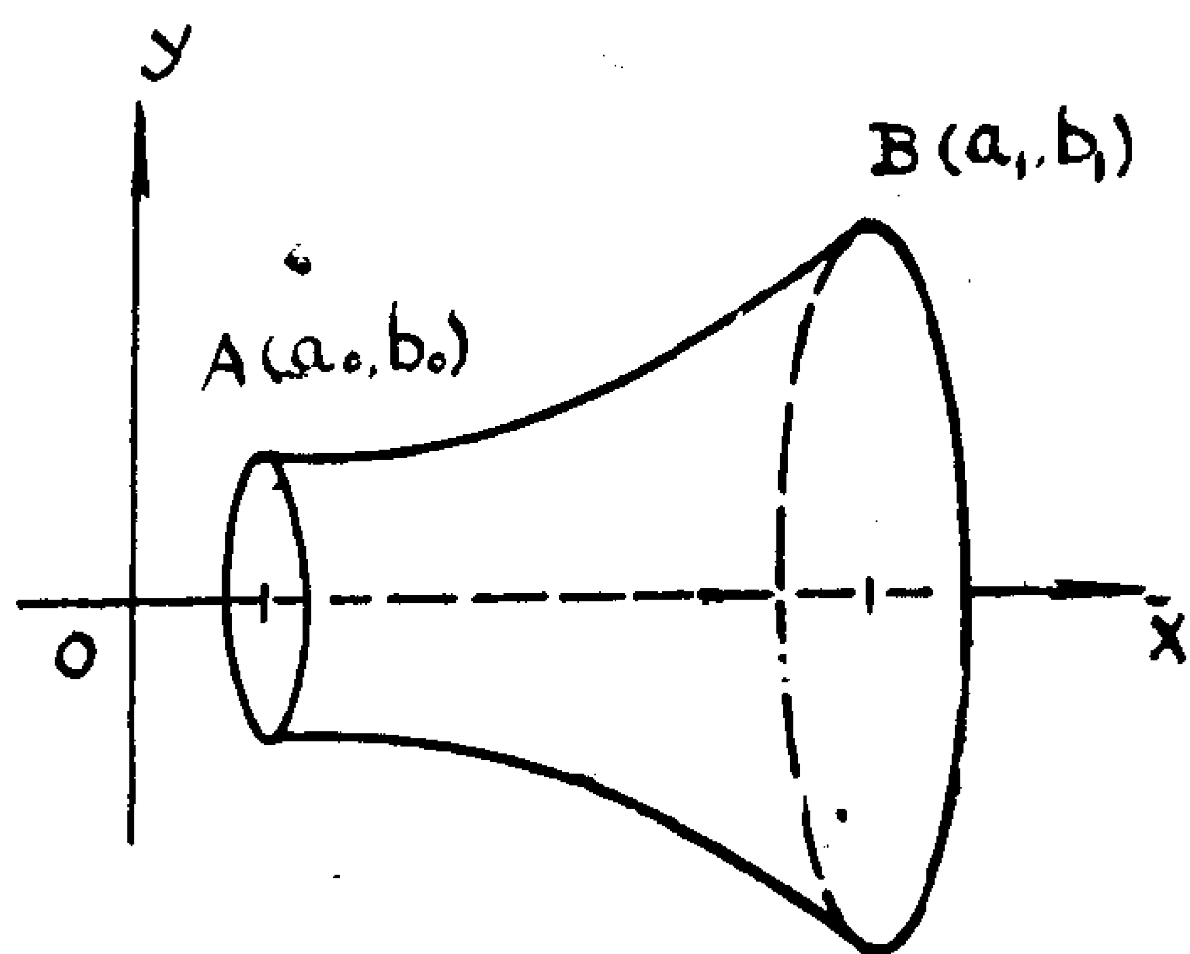


图 2.1

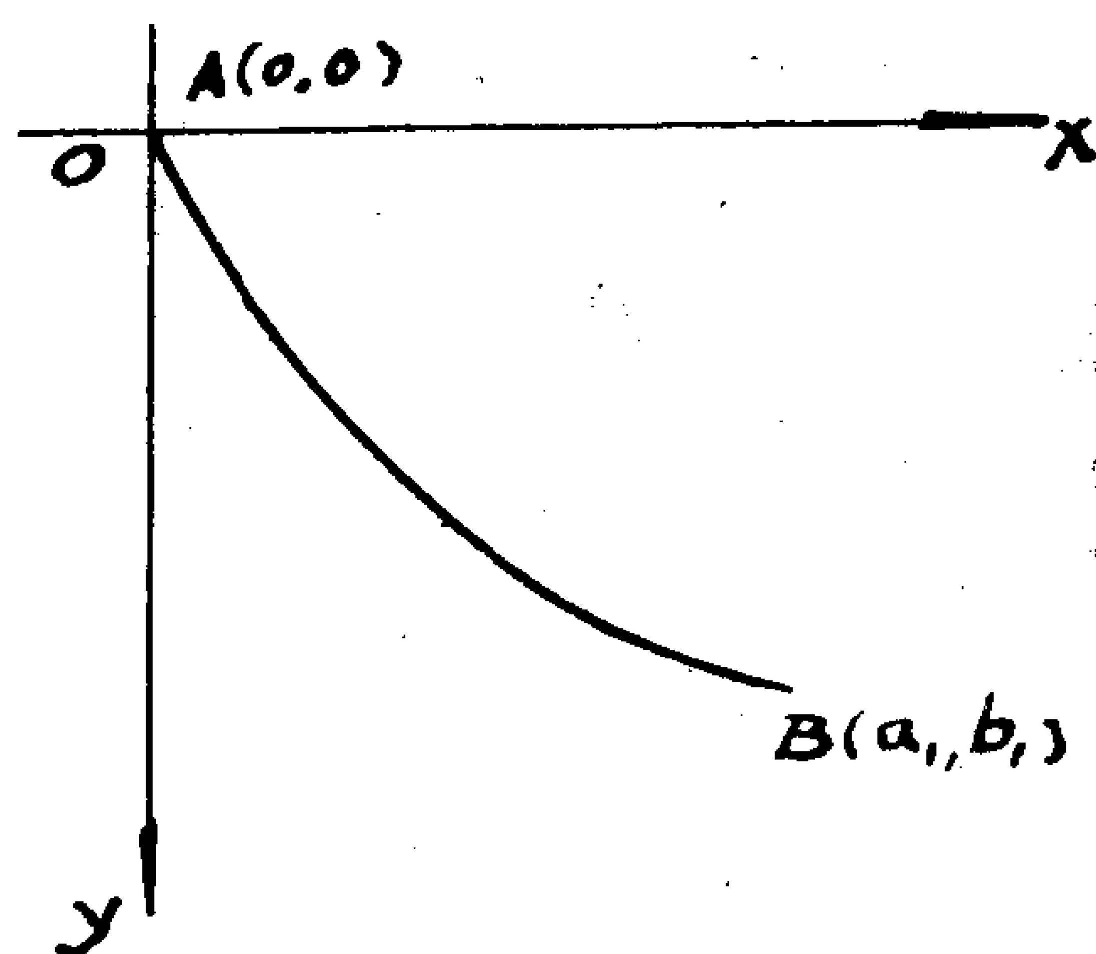


图 2.2

这两个都是极值问题。在历史上也是有名的，前者叫做**最小旋转曲面问题**，后者叫做**捷线问题**．

在这两个问题中，可以看出，对于给定的一条曲线，都有一个旋转曲面面积或一个下滑时间的数值与之对应．这样就建立了一个新的函数．它与通常函数的区别在于，通常函数的定义域是数集，或欧氏空间的点集．而上述函数的定义域则是一个函数类．我们把这种新的函数叫做**泛函**．

求泛函的极值必须建立泛函的表达式．今以最小旋转曲面和捷线为例．

最小旋转曲面：给定二点 $A(a_0,b_0)$ 和$B(a_1,b_1)$，设连接A，B二点的光滑曲线 l 的表达式为$y=y(x)$．由数学分析中知道，如图 2.1 将 l围绕 x 轴旋转一周所得的旋转曲面面积为

$$S[y(x)]=2\pi\int_{a_0}^{a_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{2.1}$$

这个式子表明，对于每一条过A，B两点的光滑曲线$y(x)$，就有一个旋转曲面面积$S[y(x)]$与之对应。

捷线：如图2.2设过A，B二点光滑曲线的方程为$y=y(x)$，重力加速度为g，由于在曲线上的点(x,y)处，质点的速度与纵坐标有如下关系：

$$v^2=2gy \quad 或 \quad \frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}.$$

所以质点滑过曲线的微小弧段$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$所需时间dt，有

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}.$$

于是质点由A滑到B所需时间为

$$t[y(x)]=\int_0^{a_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{2.2}$$

对于每一条过A，B点的光滑曲线$y=y(x)$，就有一个下滑时间$t[y(x)]$与之对应。

定义．设$\{y(x)\}$是给定的某类函数，如果对这类函数中的每个函数$y(x)$，都有一个数值$J[y(x)]$与之对应，则称$J[y(x)]$是这类函数$y(x)$的**泛函**。

在上述最小旋转曲面问题和捷线问题中，都是求**泛函极值**的问题．泛函(2.1)和(2.2)，它们的定义域都是所有满足**边值条件**

$$y(a_0)=b_0, \qquad y(a_1)=b_1$$

的连续可微函数类$\{y(x)\}$．

在变分学中，研究泛函的极值，如果它所定义的函数类，每个函数都过给定的两点，这类问题叫做**固定边界**问题．

变分学研究泛函的极值理论和极值的求法，在它的理论研究和实际应用中，作为工具的微分方程是非常重要的．

变分法不仅解决了大量实际问题，变分思想在计算方法和其它一些学科中，都有着重要的应用．

§2.1 欧 拉 方 程

现将(2.1)和(2.2)的求极值问题一般化．设已给函数$F(x,y,y')$，对于变量x，y，y'的一阶和二阶偏导数都是连续的．另外，$A(a_0,b_0)$和$B(a_1,b_1)$为平面xoy上两个给定的点，变分法中最简单的固定边界问题表述如下：

在通过已给点A，B的所有曲线（函数）

$$y=y(x)$$

中（函数$y(x)$与$y'(x)$在区间$[a_0,a_1]$上连续）求出这样的函数，使得泛函

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1} F(x,y,y')\,dx \tag{2.3}$$

取得极大或极小。

我们注意，泛函（2.3）的定义域D中每一元素都是一条光滑曲线 $y(x)$，且满足边界条件：

$$y(a_0)=b_0,\quad y(a_1)=b_1. \tag{2.4}$$

下面把满足条件（2.4）的光滑曲线称为泛函（2.3）的**容许曲线**.

现在讨论极值曲线的必要条件。

今假定泛函（2.3）当 $y=y_0(x)$（$y_0(x)\in D$）时达到极值. 取任意容许曲线 $y=y(x)$，如果令

$$y(x,\alpha)=y_0(x)+\alpha[y(x)-y_0(x)]$$

其中 α 为任意实数，则曲线族 $y(x,\alpha)$ 中的每条曲线都属于容许曲线族.

通常把差 $y(x)-y_0(x)$ 称为函数 $y_0(x)$的变分，记为

$$\delta y=y(x)-y_0(x)$$

此时，上式可写成

$$y(x,\alpha)=y_0(x)+\alpha\delta y \tag{2.5}$$

如将（2.5）代入泛函（2.3），换句话说，若仅在曲线族 $y=y(x,\alpha)$ 上考虑泛函（2.3）的值，则泛函 $J[y(x,\alpha)]$ 就成为 α 的函数，即

$$\Phi(\alpha)=\int_{a_0}^{a_1} F(x,y_0+\alpha\delta y,\ y'_0+\alpha\delta y')\,dx^{*)}=J[y(x,\alpha)] \tag{2.6}$$

根据假定，泛函 $J(y)$在 $y=y_0(x)$处取极值，这指的是，$y_0(x)$和它邻近的所有容许曲线相比较$J(y)$达到极值. 特别地，$\Phi(0)=J[y_0(x)]$和泛函（2.3）在曲线族 $y(x,\alpha)$ 上〔$|\alpha|$充分小〕所取的值$\Phi(\alpha)=J[y(x,\alpha)]$相比较也应达到极值. 换句话说$\Phi(\alpha)$ 当 $\alpha=0$时取极值. 这样，经过上述讨论，我们便把泛函 $J(y)$ 的极值问题转化为函数 $\Phi(\alpha)$ 的极值问题.

既然$\Phi(\alpha)$ 在 $\alpha=0$时有极值，由数学分析知道$\Phi'(0)=0$.这样，由 $F(x,y,y')$ 的连续可微性，可以在积分号下求导数，即有

$$\begin{aligned}\Phi'(\alpha)&=\int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial}{\partial\alpha} F(x,y_0+\alpha\delta y,\ y'_0+\alpha\delta y')\,dx\\&=\int_{a_0}^{a_1}[F'_y(x,y_0+\alpha\delta y,y'_0+\alpha\delta y')\delta y+F'_{y'}(x,y_0+\alpha\delta y,y'_0+\alpha\delta y')\delta y']\,dx.\end{aligned}$$

于是

$$\Phi'(0=)\int_{a_0}^{a_1}[F'_y(x,y_0,y'_0)\delta y+F'_{y'}(x,y_0,y'_0)\delta y']\,dx.$$

通常把上式右端称为泛函（2.3）在$y=y_0(x)$处的**变分**，并记作 $\delta J(y)|_{y=y_0(x)}$.

---

*) 符号 $\delta y'$ 表示 $y'(x)-y'_0(x)$ 即表示导数的变分，显然有 $(\delta y)'=\delta y'$

因此，泛函 $J(y)$ 在 $y=y_0(x)$ 处取极值的必要条件是：泛函 $J(y)$ 的变分 $\delta J(y)|_{y=y_0(x)}=0$，即

$$\int_{a_0}^{a_1}[F'_y\delta y+F'_{y'}\delta y']dx=0 \tag{2.7}$$

对上面的积分式中第二项施行分部积分法，并注意到

$$\delta y|_{x=a_0}=y(a_0)-y_0(a_0)=0$$

及

$$\delta y|_{x=a_1}=y(a_1)-y_0(a_1)=0.$$

则有

$$\int_{a_0}^{a_1}F'_{y'}\delta y'dx=F'_{y'}\delta y\Big|_{a_0}^{a_1}-\int_{a_0}^{a_1}\delta y\frac{d}{dx}F'_{y'}dx$$

$$=-\int_{a_0}^{a_1}\delta y\frac{d}{dx}F'_{y'}\ dx$$

从而（2.7）可以写成

$$\int_{a_0}^{a_1}\Big[F'_y(x,y_0(x),y'_0(x))-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y_0(x),y'_0(x))\Big]\delta y dx=0. \tag{2.8}$$

（2.8）式表明，如果泛函（2.3）在 $y=y_0(x)$ 处取极值，必有（2.8）式成立．这就得到了取极值的必要条件．但是，要从这个式中求得取极值的函数 $y=y_0(x)$ 还不容易，它还要进一步简化后才能使用．

我们注意（2.8）式中的 $\delta y=y(x)-y_0(x)$，而 $y(x)$ 是容许曲线中的任意曲线，所以 δy 具有相当的任意性．由于这种性质，可以从（2.8）式推出简便的极值函数满足的条件．为此先考察下面的引理．

变分学基本引理． 设 $f(x)$ 在 $[a_0, a_1]$ 上连续，如果对任何在 $[a_0, a_1]$ 上有二阶连续导数，且在 a_0，a_1 处为零的函数 $\eta(x)$，恒有

$$\int_{a_0}^{a_1}f(x)\eta(x)dx=0, \tag{2.9}$$

则必有 $f(x)\equiv0$，$x\in[a_0,a_1]$．

证明　（反证法）．如果 $f(x)$ 在 x_0 处不为零，不妨设 $f(x_0)>0$，则由 $f(x)$ 的连续性，在 x_0 的近旁必存在小区间 $[x_1,x_2]$（$a_0\leqslant x_1<x_0<x_2\leqslant a_1$），使得 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}f(x_0)>0$．

由于 $\eta(x)$ 的任意性，我们取

$$\eta(x)=\begin{cases}(x-x_1)^4(x-x_2)^4, & x_1\leqslant x\leqslant x_2,\\ 0 & ,a_0\leqslant x<x_1 \text{ 及 } x_2<x\leqslant a_1.\end{cases}$$

显然 $\eta''(x)$ 在 $[a_0, a_1]$ 上连续且 $\eta(a_0)=\eta(a_1)=0$．因此，我们有

$$\int_{a_0}^{a}f(x)\eta(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\eta(x)dx>$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2}f(x_0)(x-x_1)^4(x-x_2)^4dx>0.$$

这与条件（2.9）矛盾，故基本引理成立。

定理2.1 如果泛函

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1} F(x,y,y')\,dx \tag{2.3}$$

在曲线 $y=y_0(x)$ 达到极值，则 $y=y_0(x)$ 必为微分方程

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0 \tag{2.10}$$

的解.

证明. 按照基本引理，考察（2.8）式，因式 $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}$ 是连续函数，而变分 δy 是任意函数，且满足引理中的一切条件. 因此，我们有

$$F'_y(x,y_0(x),\ y'_0(x))-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y_0(x),y'_0(x))=0,$$

于是定理得证.

方程（2.10）是在1744年由欧拉（*Euler*）首先得到的，称为**欧拉方程**. 由复合函数微分法则，欧拉方程（2.10）也可以表示成

$$F'_y-F''_{xy'}-F''_{yy'}y'-F''_{y'y'}y''=0. \tag{2.10$'$}$$

如果 $F''_{y'y'}\neq 0$，则欧拉方程是关于 $y=y(x)$ 的二阶微分方程，它的积分曲线称为**极值曲线**. 由上面整个的论证可知，只有在极值曲线上泛函 $J(y)$ 才能达到极值. 具体地说，为了求出使得泛函 $J(y)$ 取极值的曲线（函数），我们首先积分欧拉方程，求得通解 $y=y(x,c_1,c_2)$，并用边界条件（2.4）确定常数 c_1，c_2，只有用这种方式求得的极值曲线才能使泛函达到极值.

和研究通常函数的极值问题相同，想要肯定泛函 $J(y)$ 在这些极值曲线上达到极值，以及判定它究竟是极大还是极小，就要进一步建立一些判别法则. 这些都是变分法中研究的课题. 限于篇幅，这些所谓极值的充分条件就不介绍了. 但必须注意，对于具体的实际问题，极值的存在性以及是极大或极小，是很容易肯定的. 因此，定理2.1的价值就更大了.

§2.2 欧拉方程的积分法

欧拉方程（2.10）〔或(2.10)$'$〕是二阶微分方程. 一般说来，它只在极个别情况下才能够积成有限形式. 下面给出几种特殊类型的欧拉方程，它们是可求积的.

1°. 函数 F 不显含 y'

此时泛函为

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1} F(x,\ y)\,dx.$$

因为 $F'_{y'}=0$，所以欧拉方程为

$$F'_y(x,y)=0$$

的形式．这是一个有限方程，得出的解为 $y=y(x)$，它不含任意常数．一般说来它不满足边界条件（2.4），即所讨论的变分问题的解不存在．只在个别情况下，当曲线

$$F'_y(x,y)=0$$

通过边界点（a_0,b_0），（a_1,b_1）时，才存在使 $J(y)$取极值的极值曲线．

下面通过例子说明这个问题．

例1． 求泛函

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1} y^2 dx;\qquad y(a_0)=b_0,\ y(a_1)=b_1$$

的极值．

解． 欧拉方程为

$$F'_y=0 \quad 或 \quad y=0.$$

此时，只在 $b_0=0$，$b_1=0$，极值曲线才通过边界点（参看图 2.3）．

这种情况，函数 $y=0$ 显然使泛函 $J(y)=\int_{a_0}^{a_1} y^2 dx$ 取极小值，

这是因为 $J(y)\geqslant 0$，而当函数 $y=0$时，$J(y)=0$．

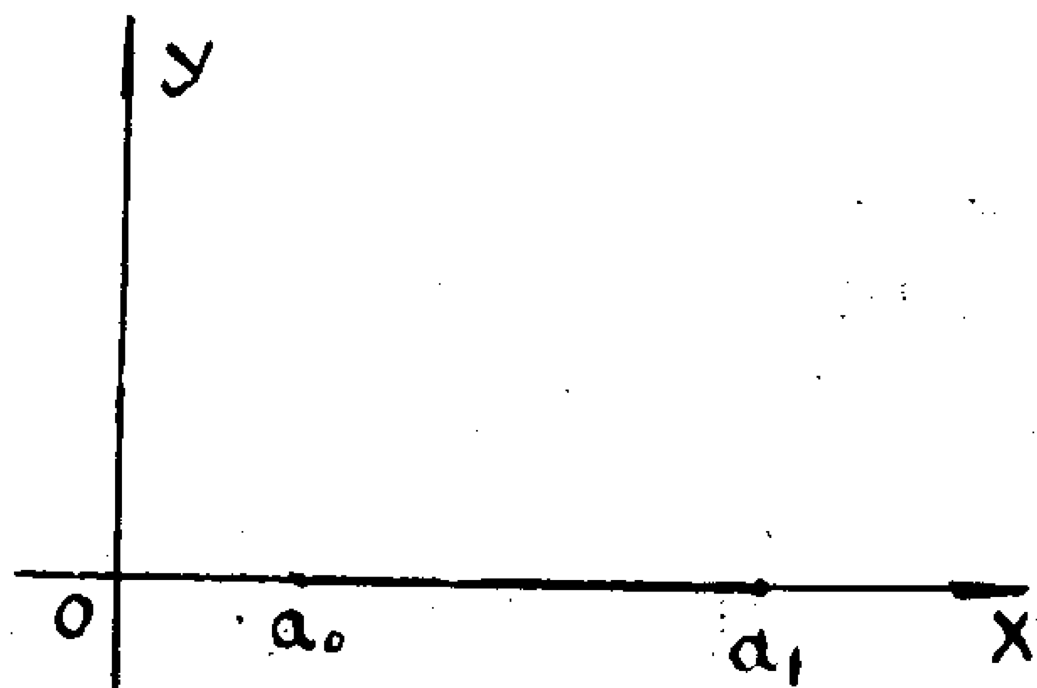


图 2.3

如果在 b_0，b_1 的二值中有一个不为零，则泛函的极小值不在连续函数上达到．这是不难说明的，因为可以选取连续函数列 $y_n(x)$，这些函数的图形是这样组成的：第一段是由点(a_0,b_0)起向下垂且愈来愈陡，而至于横轴的曲线弧．第二段是和横轴上（a_0，a_1）这一段几乎全部重合的线段．最后一段是由靠近（a_1,0）出发陡升到点（a_1，b_1）的弧（参看图 2.4）．

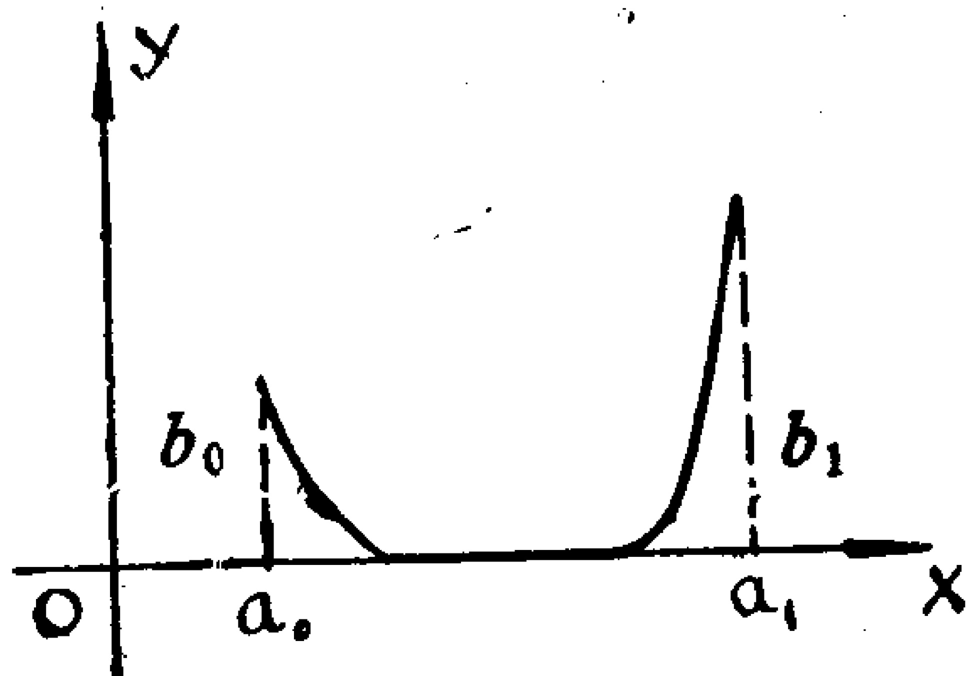


图 2.4

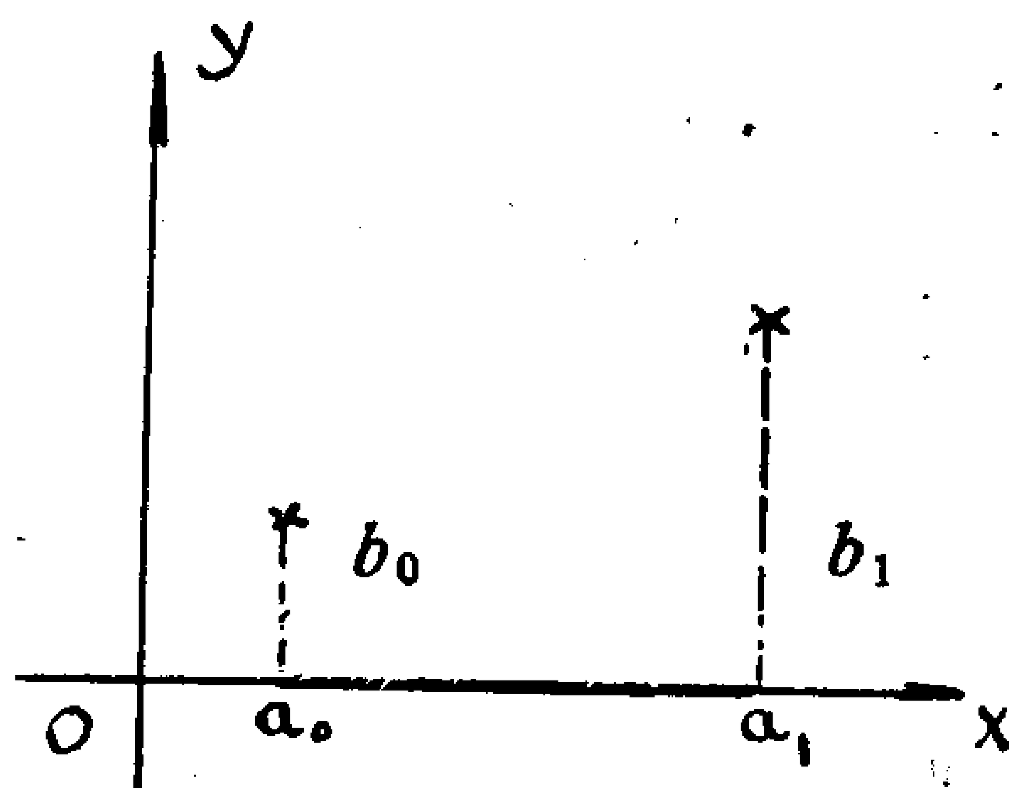


图 2.5

显然，在这样一列曲线上，泛函的值与零之差可以小于任意给定的量．因此泛函的值的下确界为零．但是这个下确界是不能在连续曲线上达到的，因为不管对于怎样的连续曲线 $y=y(x)$，只要它不恒等于零，必有 $\int_{a_0}^{a_1} y^2 dx>0$，这个泛函的值的下确界是在间断函数（参看图 2.5），$y(a_0)=b_0$，$y(x)=0\ x\in(a_0,a_1)$，$y(a_1)=0$上达到的．

2°．函数 F 不显含 y

此时，泛函为

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1} F(x,y')\,dx.$$

因为$F'_y=0$，所以它的欧拉方程为

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y')=0,$$

于是有

$$F'_{y'}(x,y')=c_1.$$

它是一个不显含y的一阶方程.根据§1.8，这个一阶方程的积分或者直接解出y'后积分，或者引入适当的参数，用参数形式解出.

例2. 泛函

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx.$$

因为它的欧拉方程为

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}\right)=0,$$

于是有

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=\bar{c}_1.$$

如果令$y'=\operatorname{tg}t$，则有

$$x=\frac{y'}{\bar{c}_1\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{\bar{c}_1}\sin t=c_1\sin t.$$

又因$dy=y'dx$，所以

$$dy=\operatorname{tg}t\cdot c_1\cos t\,dt=c_1\sin t\,dt$$

积分之，则得$y=-c_1\cos t+c_2$，于是

$$x=c_1\sin t,\quad y-c_2=-c_1\cos t,$$

消去参数t，则得

$$x^2+(y-c_2)^2=c_1^2.$$

这就是说，泛函$J(y)$的极值曲线是一族中心在纵座标轴上的圆.

3°. 函数F不显含x

此时泛函为

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1}F(y,y')\,dx.$$

因$F''_{xy}=0$，所以欧拉方程是如下形式

$$F'_y-F''_{yy'}y'-F''_{y'y'}y''=0.$$

此时，如果方程各项都乘以y'，则不难验证，方程化为恰当导数方程

$$\frac{d}{dx}(F-y'F'_{y'})=0.$$

事实上，因为

$$\frac{d}{dx}(F-y'F'_{y'})=F'_y y'+F'_{y'}y''-F'_{y'}y''-F''_{yy'}y'^2-F''_{y'y'}y''$$

$$=y'(F'_y-F''_{yy'}y'-F''_{y'y'}y'')=0.$$

于是欧拉方程可降为一阶方程，成为

$$F-y'F'_{y'}=c_1.$$

它是一个不显含x的一阶微分方程．进一步求这个方程的积分时，或者直接解出y'然后积分求得，或者引入参数，化成参数形式积分．

例3． 最小旋转曲面的欧拉方程就属于这一类．即泛函

$$S[y(x)]=\int_{a_0}^{a_1}2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{2.1}$$

的欧拉方程降阶后如下

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1,$$

化简后，则得

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1.$$

现在令 $y'=\text{sh}t$，则 $y=c_1\text{ch}t$，因为 $dy=y'dx$，所以

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{c_1\text{sh}t\,dt}{\text{sh}t}=c_1dt.$$

从而

$$x=c_1t+c_2.$$

于是所求的极值曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=c_1t+c_2,\\ y=c_1\text{sh}t.\end{cases}$$

消去参数t，得

$$y=c_1\text{ch}\frac{x-c_2}{c_1}.$$

这是一族悬链线，将它旋转一周就得表面积最小的曲面——悬链面。c_1，c_2将由代入边界条件后确定．

例4． 捷线问题

早在1696年，约翰·贝努利（*J．Bernoulli*）就研究捷线问题，它对变分法的发展有着巨大的影响．这个问题的泛函为

$$t[y(x)]=\int_0^{a_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

捷线就是使泛函$t[y(x)]$取极小值的曲线$y=y(x)$．这里$y=y(x)$满足边界条件：

$$y(0)=0,\ y(a_1)=b_1.$$

由于这个泛函$t[y(x)]$不显含x，所以欧拉方程降阶后成为

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c.$$

化简后，则有

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c \quad 或 \quad y(1+y'^2)=c_1.$$

令 $y'=\text{ctg}\,t$，则有

$$y=\frac{c_1}{1+\text{ctg}^2 t}=c_1\sin^2 t=\frac{c_1}{2}(1-\cos 2t).$$

因为 $dy=y'dt$，所以

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2c_1\sin t\cos t\,dt}{\text{ctg}\,t}=2c_1\sin^2 t\,dt=$$

$$=c_1(1-\cos 2t)\,dt.$$

因此，欧拉方程的积分曲线族的参数方程是

$$x-c_2=\frac{c_1}{2}(2t-\sin 2t),\ y=\frac{c_1}{2}(1-\cos 2t).$$

引入新的变量 $\theta=2t$，并注意到问题的边界条件，曲线通过原点，所以 $c_2=0$. 这样所求的极值曲线的参数方程又可进一步写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1}{2}(\theta-\sin\theta), \\ y=\dfrac{c_1}{2}(1-\cos\theta). \end{cases}$$

上面的方程组表示一族**旋轮线**（也称为**摆线**），即由以 $\frac{c_1}{2}$ 为半径的圆沿 x 轴旋转时，圆周上一点所描出的曲线．常数 c_1 可由旋轮线通过点 $B(a_1,\ b_1)$ 这个条件来确定．于是，摆线是捷线．

4°．函数 F 只含有 y'

此时泛函为

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1}F(y')\,dx.$$

因为 $F'_y=F''_{xy'}=F''_{yy'}=0$，于是它的欧拉方程蜕化为

$$y''F''_{y'y'}=0.$$

于是有

$$F''_{y'y'}=0 \quad 或 \quad y''=0.$$

如果 $y''=0$，则 $y=c_1x+c_2$ 是含有两个任意常数的直线族．如果方程 $F''_{y'y'}=0$ 有一个或几个根 $y'=k_i$，又得到含一个任意常数的直线族．显然，这一直线族已包含在上面的含有两个任意常数的直线族 $y=c_1x+c_2$ 之中．于是，在 $F=F(y')$ 的情况下，泛函 $J(y)$ 的极值曲线只可能是直线族 $y=c_1x+c_2$.

例5． 最短曲线的弧长问题

求连接 $A(a_0,b_0)$，$B(a_1,b_1)$ 的曲线中弧长最短的曲线．

解．由曲线弧长的公式，有

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

根据我们上面的分析，极值曲线族为

$$y=c_1x+c_2,$$

其中 c_1，c_2 可由边界条件决定.

这个结论和几何中的结论是一致的.

到目前为止，我们还只讨论平面曲线的泛函问题，但在许多实际问题里，还需讨论空间曲线的泛函极值，或者研究更一般形式的泛函

$$J(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\int_{a_0}^{a_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\,dx. \qquad (2.11)$$

其中所有函数 $y_i(x)$满足边界条件：

$$y_i(a_0)=b_{0i},\ \ y_i(a_1)=b_{1i}\ \ (i=1,2,\cdots,n).$$

为了导出这个泛函取极值的必要条件，我们把已有的曲线 $y=y(x)$ 的变分概念，直接应用到这个问题上去.

比如，泛函（2.11）在曲线

$$y=y_i(x)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

达到极小值. 这时，当曲线$y=y_i(x)$（$i=1,2,\cdots,n$）获得变分时，泛函J增大. 因此，当只让 $y=y_k(x)$获得变分，而其它函数 $y=y_i(x)$（$i\neq k$）保持不变时，泛函J 也要增大.

这样一来，当一切$y_i(x)$（$i\neq k$）固定时，可将J看成只是$y_k(x)$的泛函，因而根据最简单变分问题的必要条件，即根据定理 2.1，使泛函J达到极值的极值曲线应当满足欧拉方程

$$F'_{y_k}-\frac{d}{dx}F'_{y'_k}=0.$$

由于这一推理对函数 $y_k(x)$（$k=1,2,\cdots,n$）中任何一个都适用，所以我们得到一个二阶微分方程组

$$F'_{y_k}-\frac{d}{dx}F'_{y'_k}=0,\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

一般说来，这一方程组在 x，y_1，$y_2,\cdots,y_n$ 空间中，确定一族含有 $2n$ 个任意常数的积分曲线族. 它就是这个变分问题的极值曲线.

关于这类问题的计算和一个函数的情况相同. 由于计算这类问题要解高阶方程，有些内容我们还未讲到，所以只介绍到这里.

习　题　2.1

1. 求泛函 $J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$ 的极值曲线.

2. 求泛函 $J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{y(1+y'^2)}\,dx$ 的极值曲线.

3. 求泛函 $J(y)=\int_{x_0}^{x_1} y'(1+x^2y')dx$ 的极值曲线.

4. 求泛函 $J(y)=\int_{x_0}^{x_1} (y'^2+2yy'-16y^2)dx$ 的极值曲线.

5. 求泛函 $J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'^2}dx$ 的极值曲线.

6. 求泛函 $J(y)=\int_{x_0}^{x_1} (xy'+y'^2)dx$ 的极值曲线.

§2.3 等周问题

在许多实际应用问题中，求泛函

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1} F(x,y,y')dx \tag{2.3}$$

的变分时，除了要求容许曲线类为通过二点的光滑曲线之外，还要求曲线满足另外一些约束条件．也就是求泛函（2.3）的**条件极值**．条件极值中的约束条件有几种形式，等周问题是其中的一种约束形式.

远至古代希腊人就曾考虑过这样的问题：用一个有指定长度的曲线，连结两个定点A，B，使它和这两个点间的直线所围成的面积有极大（参看图2.6）.

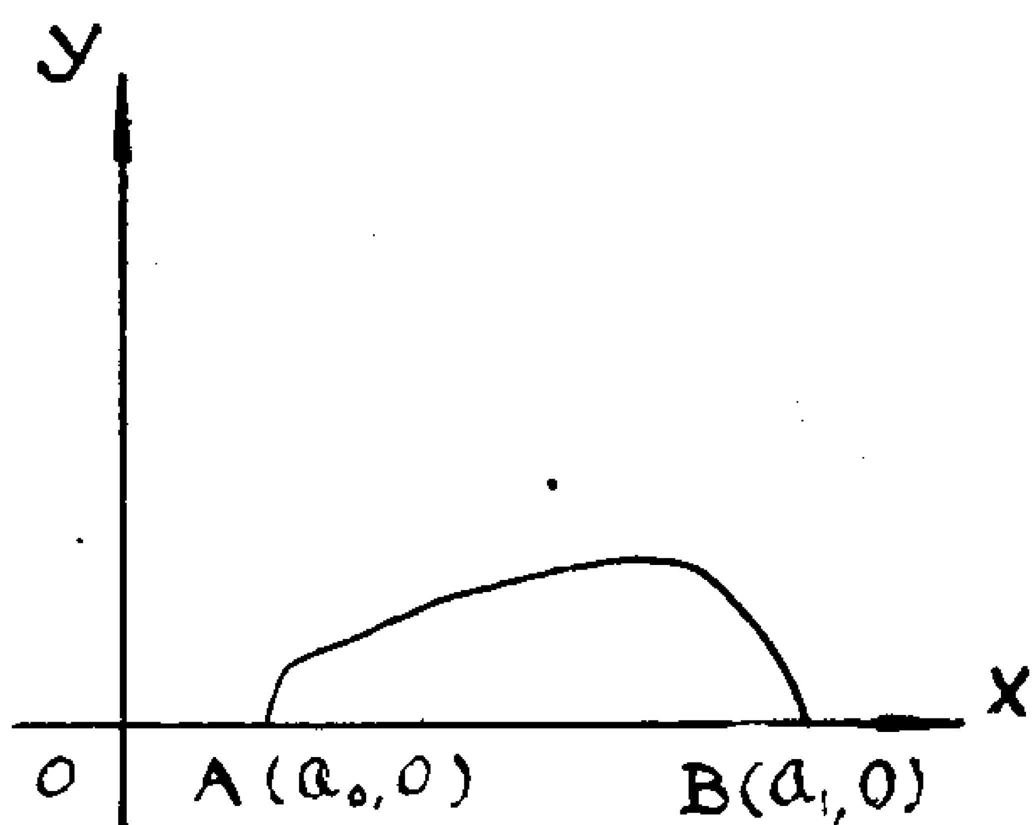


图 2.6

显然，这个等周问题就是求泛函

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1} y dx$$

在条件

$$y(a_0)=0\text{，}y(a_1)=0$$

及

$$\int_{a_0}^{a_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

之下的极值,其中 l 为大于 a_1-a_0 的一个常数.

变分法中的条件极值的提法，与数学分析中的条件极值问题完全类似．其解法也可以仿照数学分析中的拉格朗日（*Lagrange*）未定乘数法来解决．本节只对等周问题作一个简单介绍.

等周问题的一般提法如下：

在条件

$$\int_{a_0}^{a_1} G(x,y,y')dx=l,\ y(a_0)=b_0,\ y(a_1)=b_1 \tag{2.12}$$

之下，求一光滑曲线 $y=y(x)$，使泛函

$$J(y)=\int_{a_0}^{a_1} F(x,y,y')dx \tag{2.3}$$

取得极值. 其中F, G对于变元x, y, y'都有二阶连续偏导数.

对于上述变分问题，我们要推出一个具有欧拉方程形状的必要条件.

设光滑曲线$y=y_0(x)$使泛函（2.3）在满足条件（2.12）之下取极值. 在区间$[a_0,a_1]$上任取两个有二阶连续导数的函数$\eta(x)$, $\zeta(x)$，且有

$$\eta(a_0)=\eta(a_1)=0,\ \zeta(a_0)=\zeta(a_1)=0.$$

取任意常数α, β，下面我们对函数类

$$y=y_0(x)+\alpha\eta(x)+\beta\zeta(x) \tag{2.13}$$

研究当它满足约束条件（2.12）时所具有的性质. 然后，把这个具有一定性质的函数类，作为泛函（2.3）的容许函数类. 这样一来，就把求泛函（2.3）的条件极值问题，化成求无条件极值的问题了. 下面我们将按照这样的思想路线，推出$y_0(x)$使泛函（2.3）取条件极值的必要条件.

为此先考察

$$\Omega(\alpha,\beta)=\int_{a_0}^{a_1} G(x,y_0+\alpha\eta+\beta\zeta,y_0'+\alpha\eta'+\beta\zeta')\,dx-l. \tag{2.14}$$

我们将证明，方程

$$\Omega(\alpha,\beta)=0 \tag{2.15}$$

对于适当选择的$\zeta(x)$，在点（0,0）附近存在隐函数$\beta=\varphi(\alpha)$，这就是函数类（2.13）满足条件（2.12)时，所具有的性质.

下面检查（2.15）是否满足隐函数存在的条件. 为此需要证明：

1） $\Omega(0,0)=0$;

2） $\Omega(\alpha,\beta)$是变量α, β的连续函数;

3） 存在使得$\Omega'_\beta(0,0)\neq 0$的$\zeta(x)$.

首先，因为$y_0(x)$满足条件（2.12），即

$$\int_{a_0}^{a_1} G(x,y_0(x),y_0'(x))\,dx-l=0.$$

因此满足条件1）.

又因$G(x,y,y')$对于变量x, y, y'连续可微，所以（2.14）对于α, β是连续函数. 因此满足条件2）.

下面考察（2.14）是否满足条件3）.

因$\Omega(\alpha,\beta)$对于β存在连续偏导数，可以在积分号下求导数，即有

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}=\int_{a_0}^{a_1}[\zeta G'_y+\zeta' G'_{y'}]\,dx. \tag{2.16}$$

对上式的积分号下第二项施行分部积分，因$\zeta(a_0)=\zeta(a_1)=0$，于是有

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}=\int_{a_0}^{a_1}\Big[G'_y(x,y_0+\alpha\eta+\beta\zeta,y_0'+\alpha\eta'+\beta\zeta')$$
$$-\frac{d}{dx}G'_{y'}(x,y_0+\alpha\eta+\beta\zeta,y_0'+\alpha\eta'+\beta\zeta')\Big]\zeta\,dx. \tag{2.17}$$

当$\alpha=0$, $\beta=0$时

$$\Omega'_\beta(0,0)=\int_{a_0}^{a_1}[G'_y(x,y_0(x),y'_0(x))$$

$$-\frac{d}{dx}G'_{y'}(x,y_0(x),y'_0(x))]\zeta(x)dx$$

如果$G'_y(x,y_0(x),y'_0(x))-\frac{d}{dx}G'_{y'}(x,y_0(x),y'_0(x))$ 不恒为零（下面总假定这一条件成立），根据§2.2中证明基本引理的思想，总可以选取一个函数$\zeta(x)$，使得

$$\Omega'_\beta(0,0)\neq 0,$$

于是条件3）也成立.

上述讨论说明，如果函数类

$$y=y_0(x)+\alpha\eta(x)+\beta\zeta(x)$$

满足约束条件（2.12）时，可以选定$\zeta(x)$使$\Omega'_\beta(0,0)\neq 0$．从而使方程$\Omega(\alpha,\beta)=0$在点（0,0）附近存在隐函数

$$\beta=\varphi(\alpha),\ \text{且}\ \varphi(0)=0.$$

现在按上述要求选定$\zeta(x)$，并且任意选取$\eta(x)$，得到函数类

$$y=y_0(x)+\alpha\eta(x)+\varphi(\alpha)\zeta(x).\tag{2.17$'$}$$

下面我们就把这个函数类作为泛函（2.3）的容许函数类，在其上求泛函的极值．如此，就把原来的条件极值问题，化成无条件的极值问题了．即对于曲线族（2.17）$'$，来考虑

$$\psi(\alpha)=\int_{a_0}^{a_1}F(x,y_0+\alpha\eta+\varphi(\alpha)\zeta,y'_0+\alpha\eta'+\varphi(\alpha)\zeta')dx$$

的极值问题.

既然泛函（2.3）在$y=y_0(x)$处取极值，故$\psi(\alpha)$在$\alpha=0$处取极值，所以有$\psi'(0)=0$，而

$$\psi'(\alpha)=\int_{a_0}^{a_1}[(\eta+\varphi'(\alpha)\zeta)F'_y+(\eta'+\varphi'(\alpha)\zeta')F'_{y'}]dx$$

$$=\int_{a_0}^{a_1}(\eta F'_y+\eta'F'_{y'})dx+\varphi'(\alpha)\int_{a_0}^{a_1}(\zeta F'_y+\zeta'F'_{y'})dx$$

其中F'_y及$F'_{y'}$均在x，$y_0(x)+\alpha\eta(x)+\varphi(\alpha)\zeta(x)$，$y'_0(x)+\alpha\eta'(x)+\varphi(\alpha)\zeta'(x)$处取值.

令$\alpha=0$，有

$$\psi'(0)=\int_{a_0}^{a_1}[\eta(x)F'_y(x,y_0,y'_0)+\eta'(x)F'_{y'}(x,y_0,y'_0)]dx+$$

$$+\varphi'(0)\int_{a_0}^{a_1}[\zeta(x)F'_y(x,y_0,y'_0)+\zeta'(x)F'_{y'}(x,y_0,y'_0)]dx=0.\tag{2.18}$$

另外，由隐函数的可微性定理知

$$\varphi'(\alpha)=-\frac{\Omega'_\alpha(\alpha,\beta)}{\Omega'_\beta(\alpha,\beta)},$$

于是

$$\varphi'(0) = -\frac{\int_{a_0}^{a_1}(\eta G'_y + \eta' G'_{y'})\,dx}{\int_{a_0}^{a_1}(\zeta G'_y + \zeta' G'_{y'})\,dx}$$

代入（2.18），得

$$\int_{a_0}^{a_1} (\eta F'_y + \eta' F'_{y'})\ dx - \frac{\int_{a_0}^{a_1}(\eta G'_y + \eta' G'_{y'})\,dx}{\int_{a_0}^{a_1}(\zeta G'_y + \zeta' G'_{y'})\,dx}\int_{a_0}^{a_1} (\zeta F'_y + \zeta' F'_{y'})\,dx = 0. \tag{2.19}$$

因 $\zeta(x)$为取定的函数，故

$$\int_{a_0}^{a_1} (\zeta G'_y + \zeta' G'_{y'})\,dx \quad 及 \int_{a_0}^{a_1} (\zeta F'_y + \zeta' F'_{y'})\,dx$$

均为常数，且前者不为零.

今令

$$\frac{\int_{a_0}^{a_1} (\zeta F'_y + \zeta F'_{y'})\,dx}{\int_{a_0}^{a_1} (\zeta G'_y + \zeta' G'_{y'})\,dx} = -\lambda.$$

于是（2.19）可化为

$$\int_{a_0}^{a_1} (\eta F'_y + \eta' F'_{y'})\,dx + \lambda \int_{a_0}^{a_1} (\eta G'_y + \eta' G'_{y'})\,dx = 0,$$

即

$$\int_{a_0}^{a_1} [\eta(F'_y + \lambda G'_y) + \eta'(F'_y + \lambda G'_{y'})]\,dx = 0.$$

将上式积分号下第二项施行分部积分，得

$$\int_{a_0}^{a_1} [(F'_y + \lambda G'_y) - \frac{d}{dx}(F'_{y'} + \lambda G'_{y'})]\eta(x)\,dx = 0.$$

在这里的$\eta(x)$是$[a_0, a_1]$上的任意二阶连续可微函数，且有$\eta(a_0) = \eta(a_1) = 0$，因此根据§2.1中基本引理，知光滑曲线$y = y_0(x)$必满足欧拉方程

$$(F'_y + \lambda G'_y) - \frac{d}{dx}(F'_{y'} + \lambda G'_{y'}) = 0.$$

把以上讨论的结果写成如下的定理.

定理2.2 如果泛函$J(y)$在$y = y_0(x)$处取极值，且$G'_y - \frac{d}{dx}G'_{y'}$不恒为零，则存在$\lambda$，使$y = y_0(x)$满足欧拉方程

$$(F'_y + \lambda G'_y) - \frac{d}{dx}(F'_{y'} + \lambda G'_{y'}) = 0. \tag{2.17}$$

换句话说，求泛函（2.3）在条件（2.12）下的极值曲线，相当于把泛函（2.3）中的函数F换成$F+\lambda G$，即求此泛函的无条件极值曲线，其中λ为一未定常数.

例7. 现在回头解决本节开始提出的问题.

这个问题相当于求泛函

$$F+\lambda G=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$$

的极值.

现在考虑，如果

$$G'_y-\frac{d}{dx}G'_{y'}=\frac{d}{dx}\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}\equiv 0$$

则$y'(x)$必为一常数，即$y(x)$为一直线，且要通过两定点A，B. 显然$y(x)$不是我们所考虑的变分问题的容许曲线. 因此我们要求的极值曲线，必不能使上式恒为零，所以满足定理2.2的条件.

现在可知欧拉方程为

$$1-\frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0.$$

积分之，则有

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x-c_1.$$

为了积分所得方程，引入参数t，令$y'=\mathrm{tg}\,t$，则

$$x-c_1=\lambda\sin t;$$

因为 $dy=y'dx$，所以

$$dy=\mathrm{tg}\,t\cdot\lambda\cos t\,dt=\lambda\sin t\,dt.$$

积分之，则有

$$y=-\lambda\cos t+c_2.$$

于是，积分后得极值曲线的参数表达式

$$x-c_1=\lambda\sin t,\quad y-c_2=\lambda\cos t.$$

消去t，得

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2.$$

所以这个等周问题的极值曲线是一个连接A，B二点且长度为l的圆弧，其中常数c_1，c_2及λ由边界条件以及等周条件来确定.

习　题　2.2

1．在条件

$$\int_0^1 y^2dx=2;\quad y(0)=0,\quad y(1)=0$$

之下，求等周问题

$$J(y)=\int_0^1(y'^2+x^2)dx$$

的极值曲线.

2. 写出泛函

$$J(y)=\int_a^b [p(x)y'^2+q(x)y^2]dx$$

满足条件

$$\int_a^b y^2 dx=1, \quad y(a)=0, \quad y(b)=0$$

的极值曲线所满足的欧拉方程.

3. 求长为 l 两端连结于二点 A, B 的绝对柔软而不伸长的匀质链的形状.

提示：在等周条件下，这曲线的重心应该最低，因而关于 ox 轴有最小静力矩.

第三章 基 本 定 理

在 §1.7 中我们已经简略地叙述了一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3.1}$$

的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{3.2}$$

的解的存在与唯一性定理，而且还指出了讨论初值问题解的存在性与唯一性，无论对于研究解的近似解法或者对于发展常微分方程理论，都有极为根本的意义．尤其是后者，可以说，解的存在性与唯一性是近代常微分方程定性理论、稳定性理论以及其它理论的基础．因此，我们这一章将在 §1.7 的基础上再对它进行一些较深入的讨论，同时还将涉及某些对于常微分方程理论研究较重要的问题．

§3.1 解的存在性与唯一性定理

1°．存在性和唯一性定理的叙述

定理3.1 如果方程（3.1）的右端函数 $f(x,y)$在矩形

$$R:\ x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\quad y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b$$

上满足如下条件：

1） 在R上连续；由于矩形R是闭的，所以在R上有 $|f(x,y)|\leqslant M$；

2） 在矩形R上关于变数y满足**李普希兹**（**Lipschitz**）**条件**，即存在常数N，使对于区域R上任何一对点(x,y)和$(x,\bar{y})$(请注意两点的横坐标相同)，均有不等式：

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqslant N|y-\bar{y}|,$$

则初值问题(3.2)在区间 $x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0-h_0$上存在唯一解$y=\varphi(x)$，$\varphi(x_0)=y_0$，这里 $h_0=min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$．

下面先对定理的条件与结论作些说明：

(1) 在实际应用时，李普希兹条件的检验是比较费事的，但它能够用一个较严格的，但却易于验证的条件来代替，即如果函数 $f(x,y)$ 在矩形R上关于y的偏导数 $f'_y(x,y)$存在并有界，$|f'_y(x,y)|\leqslant N$，则李普希兹条件成立．事实上，由拉格朗日中值定理有

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|=|f'_y(x,\xi)|\cdot|y-\bar{y}|\leqslant N|y-\bar{y}|,$$

其中ξ为y和$\bar{y}$中间的一个值，从而$(x,\xi)\in R$. 如果$f'_y(x,y)$在R上连续，它在R上当然也就满足李普希兹条件.

(2) 我们再对数h_0做些解释. 从几何上可以直观看出，我们不能要求初值问题(3.2)在整个区间$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a$上有解存在，因为积分曲线$y=\varphi(x)$在某点$x=x_1$ ($x_0<x_1<x_0+a$) 处或$x=x_2$ ($x_0-a<x_2<x_0$) 处，可以从矩形R的上边界$y=y_0+b$或下边界$y=y_0-b$跑到R的外部（见图3.1），这时，对于值$x>x_1$，（或$x<x_2$）函数$\varphi(x)$便可能没有定义.

但是，若从点(x_0,y_0)引两条斜率分别等于M和$-M$的直线，它们和矩形R的上、下边界的交点的横坐标是$x_0\pm\frac{b}{M}$（见图3.2）. 此时，通过点(x_0,y_0)的积分曲线$\varphi(x)$，如果它要跑出矩形R，不可能穿越两直线$y-y_0=\pm M(x-x_0)$. 因为积

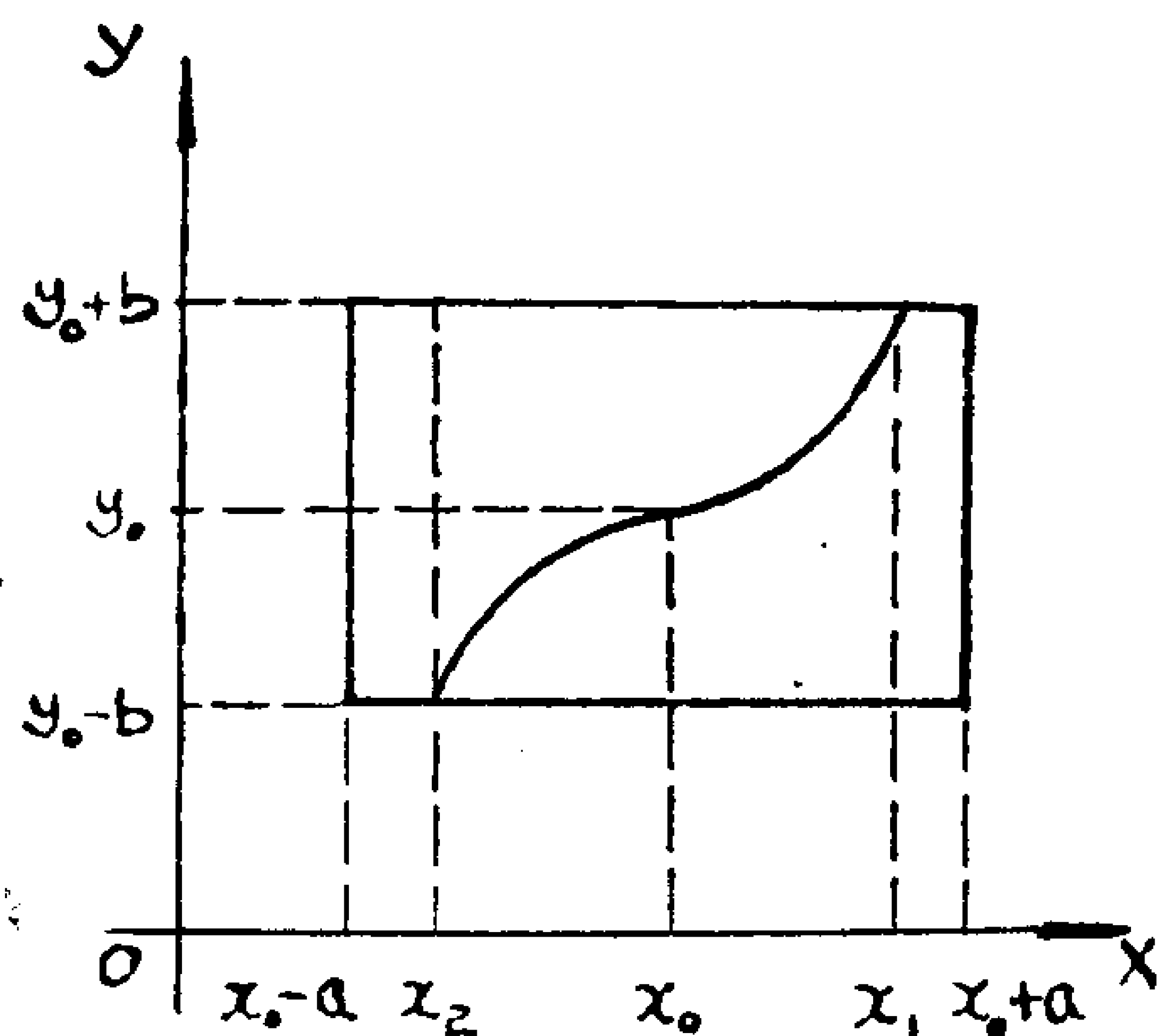


图 3,1

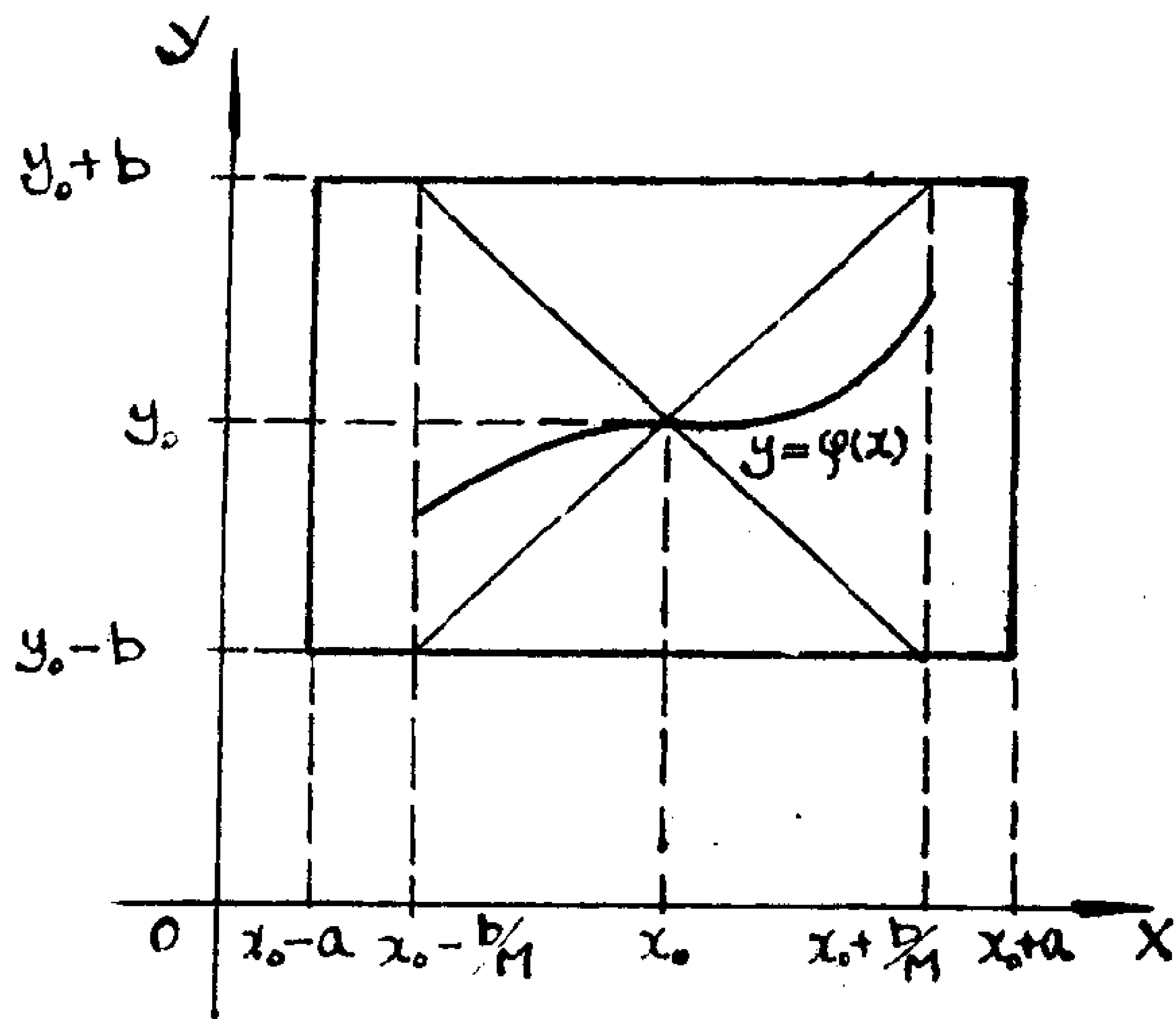


图 3,2

分曲线的切线斜率在$-M$与$+M$之间，而只在区间$[x_0-\frac{b}{M},x_0+\frac{b}{M}]$之外才有可能. 这里有可能$\frac{b}{M}\geqslant a$，图3.2所画的是$\frac{b}{M}<a$的情形. 这样，为了保险起见，我们就只要求初值问题(3.2)的解在区间$x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$上存在，其中$h_0=min(a,\frac{b}{M})$.

2°. 证明可分为三大段

(1) 首先我们指出，初值问题(3,2)等价于积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y)d\xi. \tag{3.3}$$

事实上，如果$y=\varphi(x)$是初值问题(3.2)的解，即有恒等式：

$$\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)), \tag{3.4}$$

且还满足$\varphi(x_0)=y_0$，那么从x_0到x积分(3,4)，就得到下面恒等式

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi, \tag{3.5}$$

即$y=\varphi(x)$是积分方程(3.3)的解．反之，如果连续函数$y=\varphi(x)$是积分方程(3.3)的解，即有恒等式（3.5），而且$\varphi(x_0)=y_0$；又由于$f(x,\varphi(x))$是连续的，所以从恒等式(3.5)容易知道$\varphi(x)$有连续的导数，而且微分（3.5）就得恒等式（3.4），这表示$\varphi(x)$是初值问题（3.2）的解．

因此，下面我们只要证明，积分方程（3.3）的连续解在$|x-x_0|\leqslant h_0$上存在而且唯一就行了．

(2) 用**毕卡（Picard）逐次逼近法**证明积分方程（3.3）解的存在性．先大致描述其步骤如下：

① 构造逐次近似序列

任取一个满足初始条件$y(x_0)=y_0$的函数$y=\varphi_0(x)$，且此函数的图象当$x_0-h_0\leqslant$ $\leqslant x\leqslant x_0+h_0$时不超出矩形$R$，比如，取$\varphi_0(x)\equiv y_0$．将它代入方程（3.3）的右端，所得到的函数用$\varphi_1(x)$表示，并称为**一次近似**，即

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y_0)d\xi.$$

再将$\varphi_1(x)$代入方程（3.3）的右端，即可得**二次近似**：

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_1(\xi))d\xi.$$

循此手续可以得到**n次近似**：

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi. \tag{3.6}$$

由归纳法可以证明，用这种办法可以得到在区间$x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$上定义的近似序列$\{\varphi_n(x)\}$．

② 证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$存在．

③ 证明在恒等式（3.6）中，能在积分号下取极限．这时，令$n\to\infty$，将有

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi.$$

这表明$\varphi(x)$是积分方程（3.3）的连续解，也就是说，$\varphi(x)$是初值问题（3.2）的解．

(4) 利用**贝尔曼（Bellman）不等式**证明（3.3）解的唯一性．

3°．存在性的证明

如上所述，解的存在性的证明可以分为如下三个步骤进行：

(1) 证明当$x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$时，逐次近似手续可以进行，换句话说，在区间$[x_0-h_0,\ x_0+h_0]$上，的确可以构造出近似序列$\{\varphi_n(x)\}$来．

为了保证逐次逼近手续可以一直进行下去，只要证明各次近似解都不会超出区间$[y_0-b,\ y_0+b]$，即都不越出矩形R之外．因为，假若其中某个跑出了这个矩形，由于$f(x,y)$在R之外不能保证定理条件成立，就不能用它来代替方程（3.3）中的y，从而逐次逼近的手续就中断了．

下面用数学归纳法来证明．已知$\varphi_0(x)\equiv y_0$的图象不越出矩形R，假定函数$\varphi_{n-1}(x)$的图形不越出矩形R，往证函数$\varphi_n(x)$的图象也不越出矩形R．换句话说，当$x_0-h_0\leqslant$

$x \leqslant x_0 + h_0$ 时，有

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqslant b.$$

由（3.6）有

$$\varphi_n(x) - y_0 = \int_{x_1}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi$$

从而得到

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))| d\xi\right|$$

由于已假设当 $|x - x_1| \leqslant h_0$时，$|\varphi_{n-1}(x) - y_0| \leqslant b$，所以根据定理的条件 1）以及 $h_0 \leqslant \dfrac{b}{M}$，就有

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqslant M \left|\int_{x_0}^{x} d\xi\right| \leqslant M|x - y_0| \leqslant Mh_0 \leqslant b.$$

这样，我们在区间$[x_0 - h_0,\ x_0 + h_0]$上，就可以按逐次逼近手续得到一个连续函数列（近似序列）：

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots.$$

（2）证明近似序列$\{\varphi_n(x)\}$在区间$x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0$ 上一致收敛.

证明：为此，考虑函数项级数

$$\varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + \cdots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] + \cdots. \tag{3.7}$$

它的部分和是

$$S_n(x) = \varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + \cdots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] = \varphi_n(x).$$

因此，如果级数收敛，则表明$\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$存在. 为了证明级数收敛，现估计级数各项的绝对值.

首先有 $\varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi_1, \varphi_0(\xi)) d\xi$,

或写成 $\quad \varphi_1(x) - y_0 = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\xi$,

所以 $\quad |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leqslant \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0) d\xi\right| \leqslant M|x - x_0|$.

由一次近似和二次近似的定义，并注意到定理满足李普希兹条件，就得到：

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))] d\xi\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi\right| \\
&\leqslant N \left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)|\, d\xi\right| \\
&\leqslant MN \left|\int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|\, d\xi\right| = M \cdot N \frac{|x - x_0|^2}{2}.
\end{aligned}$$

类似地可得：

$$
\begin{aligned}
|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_2(\xi))-f(\xi,\varphi_1(\xi))|\,d\xi\right| \\
&\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)|\,d\xi\right| \\
&\leqslant MN^2\left|\int_{x_0}^{x} \frac{|\xi-x_0|^2}{2!}\,d\xi\right| \\
&= MN^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}.
\end{aligned}
$$

下面用归纳法证明不等式：

$$
|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant MN^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!} \tag{3.8}
$$

对任一自然数n都成立．上面已证明当$n=1,2,3$时，不等式是成立的．现假设对某一自然数n不等式（3.8）成立，我们来证明不等式对于$n+1$也成立．事实上

$$
\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)=\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))]d\xi.
$$

由此，

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))|\,d\xi\right| \\
&\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\,d\xi\right|.
\end{aligned}
$$

根据归纳假设，利用不等式（3.8），就有

$$
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leqslant MN^n\left|\int_{x_0}^{x} \frac{|\xi-x_0|^n}{n!}\,d\xi\right| = MN^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.
$$

注意到$|x-x_0|\leqslant h_0$，易于看出级数（3.7）从第二项开始，每一项的绝对值都小于正项级数

$$
Mh_0+MN\frac{h_0^2}{2!}+\cdots+MN^{n-1}\frac{h_0^n}{n!}+\cdots
$$

的对应项，而上面这个正项级数显然是收敛的．所以，由优级数判别法，级数（3.7）就在区间$[x_0-h_0,x_0+h_0]$上不但收敛，而且是一致收敛．设其和函数为$\varphi(x)$，从而近似序列$\{\varphi_n(x)\}$在区间$[x_0-h_0,x_0+h_0]$上一致收敛于$\varphi(x)$．由于$\varphi_n(x)$在区间$[x_0-h_0,x_0+h_0]$上是连续的，因而$\varphi(x)$也是连续的．

(3) 证明$\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$是积分方程（3.3）的解，从而也是初值问题（3.2）的解．

证明：要对恒等式(3.6)取极限．为此，我们先利用李普希兹条件，作下面的估值：

$$
\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_n(\xi))d\xi-\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))d\xi\right|\leqslant
$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi(\xi))|d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi(\xi)|d\xi\right|\leqslant Nh_0\max_{x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0}\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right|.$$

由于序列$\{\varphi_n(x)\}$在区间$[x_0-h_0,x_0+h_0]$上一致收敛，因此，对任给$\varepsilon>0$，存在自然数n_0，当$n\geqslant n_0$时，对区间$[x_0-h_0,x_0+h_0]$上所有x，恒有

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon,\text{ 从而 }\max_{x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$$

由此推得

$$\left|\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi-\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi\right|\leqslant N\cdot h_0\cdot\varepsilon.$$

换句话说，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi))d\xi=\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi.$$

现在对恒等式（3.6）取极限．得到

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi,$$

即

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi.$$

此即表明函数$\varphi(x)$是方程（3.3）的解．

4°．唯一性的证明

今先介绍一个以后非常有用的引理．

贝尔曼（Bellman）引理．设$y(x)$为区间$[a,b]$上非负的连续函数，$a\leqslant x_0\leqslant b$．若存在$\delta>0$，$k\geqslant0$，使得$y(x)$满足不等式

$$y(x)\leqslant\delta+k\left|\int_{x_0}^{x}y(\tau)d\tau\right|,\quad x\in[a,b],\tag{3.9}$$

则$y(x)$就满足不等式

$$y(x)\leqslant\delta e^{k|x-x_0|},\qquad x\in[a,b].$$

证明 先证明$x\geqslant x_0$的情形．

令 $R(x)=\int_{x_0}^{x}y(\tau)d\tau$，于是从（3.9）式立即有$R'(x)-kR(x)\leqslant\delta$．上式两端同乘因子$e^{-k(x-x_0)}$，则有

$$\frac{d}{dx}[R(x)e^{-k(x-x_0)}]\leqslant\delta e^{-k(x-x_0)}.$$

上式两端同乘k后，再由x_0到x积分，则有

$$kR(x)e^{-k(x-x_0}\leqslant\delta-\delta e^{-k(x-x_0)},$$

即

$$\delta + kR(x) \leqslant \delta e^{k(x-x_0)}.$$

由已知不等式（3.9）知 $y(x) \leqslant \delta + kR(x)$，从而由上式得到

$$y(x) \leqslant \delta e^{k(x-x_0)}, \qquad x \geqslant x_0.$$

至于 $x < x_0$ 的情况可类似地证明．引理证毕．

以下证明积分方程（3.3）的解的唯一性．

证明．假定积分方程(3.3)除了解 $\varphi(x)$ 之外，还有另外的解 $\psi(x)$．我们下面要证明：在 $|x - x_0| \leqslant h_0$ 上，必有 $\psi(x) \equiv \varphi(x)$．

事实上，因为

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

及
$$\psi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \psi(\tau)) d\tau.$$

将这两个恒等式作差，并利用李普希兹条件来估值，就有

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| d\tau \right|$$

$$\leqslant N \int_{x_0}^{x} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau.$$

与贝尔曼不等式比较，$y(x) = |\varphi(x) - \psi(x)|$，$\delta = 0$，$k = N$；从而由引理知，在 $|x - x_0| \leqslant h_0$ 上有

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \equiv 0.$$

从而

$$\varphi(x) \equiv \psi(x).$$

证毕．

到此，关于初值问题（3.2）的解的存在性与唯一性的定理3.1全部证完．

为了加深对定理的理解，我们请大家注意如下几点说明：

（1）上面我们曾说过，证明定理 3.1 所采用的逐次逼近法，在实用上也是一种求近似解的有效办法．在区间 $|x - x_0| \leqslant h_0$ 上，当用 n 次近似 $\varphi_n(x)$ 来逼近精确解 $\varphi(x)$ 时，不难估计它的误差．事实上，有

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leqslant \frac{M}{N} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{N^k |x - x_0|^k}{k!}$$

$$\leqslant \frac{M}{N} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(Nh_0)^k}{k!} < \frac{M}{N} \frac{(Nh_0)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Nh_0)^k}{k!} =$$

$$= \frac{M}{N} \frac{(Nh_0)^{n+1}}{(n+1)!} e^{Nh_0}.$$

（2）如果方程（3.1）是线性方程，即

$$\frac{dy}{dx} = p(x) y + q(x),$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续，我们不难验证，此时方程的右端函数关于 y 满

足李普希兹条件．在这些条件下，利用定理 3.1 中的方法，可以证明对任一初始值(x_0, y_0)，$x_0\in[\alpha, \beta]$，线性方程所确定的解在整个区间$[\alpha, \beta]$上都有定义．

定理 3.1 指出，对于一般方程(3.1)而言，由初始条件所确定的解只能在$|x-x_0|\leqslant h_0$上有定义，这是由于在作逐次近似序列$\{\varphi_n(x)\}$时，要求它不能越出原来的矩形R．现在，线性方程的右端对y没有任何限制．因此，如定理 3.1 中所作的近似序列$\{\varphi_n(x)\}$就能在整个区间$[\alpha, \beta]$上都有定义．而且在其上一致收敛，从而其极限函数$\varphi(x)$，即线性方程满足初值$y(x_0)=y_0$的解，在整个区间$[\alpha, \beta]$上有定义.这个说明，对以后高阶线性微分方程式和线性微分方程组都很有用．

(3) 对方程 (3.1) 的右端函数$f(x, y)$，如果仅假定它是连续的，一般地说，仅能保证初值解的存在性（*Peano*定理，请参看王柔怀，伍卓群著《常微分方程讲义》第五章§2.4，第 166 页），并不能保证其唯一性．例如方程

$$\frac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}},$$

虽然右端函数$f(x, y)=3y^{\frac{2}{3}}$，在整个xoy平面上连续，但是满足初始条件$y(0)=0$的解至少就有两个：

$$y=0 \quad 和 \quad y=x^3.$$

(4) 为了保证方程 (3.1) 初值解的唯一性，较为著名的常用的充分条件就是定理 3.1中所给的李普希兹条件．但这个条件却并非必要的．

例1． 试证方程

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}0, & 当 y=0,\\ y\ln|y|, & 当 y\neq 0\end{cases}$$

经过xoy平面上任一点的解都是唯一的．

证明． 方程右端函数在$y\neq 0$时，满足存在唯一性定理条件，因此，对于除ox轴外之任何点(x_0, y_0)，初值问题 (3.2) 的解都存在且唯一．于是，只有对于ox轴上的点，还需要讨论其初值问题 (3.2) 的解的唯一性．

我们注意到$y=0$为方程的解．当$y\neq 0$时，因为

$$\frac{dy}{dx}=y\ln|y|,$$

故可解得通解为

$$y=\pm e^{Ce^x}.$$

$y=e^{Ce^x}$为上半平面的通解，$y=-e^{Ce^x}$为下半平面的通解.这些解不可能与$y=0$相交．因此，对于ox轴上的点$(x_0, 0)$，只有$y=0$通过，从而保证了初值解的唯一性．但是，我们有

$$|f(x, y)-f(x, 0)|=|y\ln|y||=|\ln|y||\cdot|y|.$$

因为$\lim\limits_{y\to 0}|\ln|y||=+\infty$，故不可能存在常数$N>0$，使得

$$|f(x, y)-f(x, 0)|\leqslant N\cdot|y|.$$

从而方程的右端函数在$y=0$的邻域上并不满足李普希兹条件．这个例子说明李普希兹

条件不是保证初值解唯一的必要条件.

为了保证方程(3.1)的初值解的唯一性，有着比李普希兹条件更弱的条件. 直到现在，唯一性的问题仍是一个研究课题. 有兴趣的读者可参看其它的书籍和文献(例如王柔怀，伍卓群著《常微分方程讲义》第183页).

习　　题 3.1

1. 试判断方程$\frac{dy}{dx}=x\operatorname{tg}y$ 在区域

   1) R_1: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant\pi$,

   2) R_2: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}$.

上是否满足存在与唯一性定理的条件?

2. 判断下列方程:

   1) $y'=x^2+y^2$,　　　　2) $y'=x+\sin y$,

   3) $y'=x^{-\frac{1}{3}}$,　　　　4) $y'=\sqrt{|y|}$,

在什么样的区域上保证初值解存在且唯一?

3. 讨论方程$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$在怎样的区域中满足解的存在与唯一性定理条件. 并求通过(0, 0)的一切解.

4. 判断下列方程是否有奇解? 如果有奇解，求出奇解，并作图.

   1) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{|y|}$;　　　　2) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$;

   3) $\frac{dy}{dx}=-x\pm\sqrt{x^2+2y}$.

5. 试求方程$\frac{dy}{dx}=x-y^2$满足初值条件 $y(0)=0$ 的近似解:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x).$$

6. 利用逐次逼近法，求方程$\frac{dy}{dx}=y^2-x^2$适合初值条件 $y(0)=1$ 的近似解:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x).$$

7. 试证明，定理3.1中的n次近似解$\varphi_n(x)$与精确解$\varphi(x)$有如下的误差估计式:

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

8. 利用上面的估计式，估计:

   1) 6题中三次近似$\varphi_3(x)$在$x=\frac{1}{2}$和$x=1$时的误差;

   2) 7题中二次近似$\varphi_2(x)$在$x=\frac{1}{4}$时的误差.

§3.2 解的延展

1°. 上节已经证明，当方程(3.1)的右端函数$f(x,y)$在R上满足存在与唯一性定理的条件时，初值问题（3.2）的解在区间$|x-x_0|\leqslant h_0$上存在且唯一．但是，我们指出，这个定理的结果是局部的，也就是说解的存在区间是“很小”的．然而$f(x,y)$的存在区域D可能会比R大得多，在实际应用上，人们也希望解的存在区间大一点．这一节就是用**延展**的方法来尽量扩大解的存在区间，把定理3.1的结果由局部的变成大范围的．

假定方程（3.1）的右端函数$f(x,y)$在xoy平面的某一区域D上有定义且连续，关于变量y还满足局部李普希兹条件*．于是在这个区域D内，总可以取一个以点$P_0(x_0,y_0)$为中心的矩形R，使得在其中存在与唯一性定理条件成立．上节定理已经证明在区间

$$I:\ x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$$

上，初值问题（3.2）的解$y=\varphi(x)$是存在且唯一的。

设$x_0^{(1)}=x_0+h_0$，$\varphi(x_0+h_0)=y_0^{(1)}$时，坐标为（$x_0^{(1)}$，$y_0^{(1)}$）的点$P_1$属于矩形$R$，从而必是$D$的点，那么，必定又可作以点$P_1(x_0^{(1)},\ y_0^{(1)})$为中心的矩形$R_1$：$|x-x_0^{(1)}|\leqslant a_1$，$|y-y_0^{(1)}|\leqslant b_1$使得$R_1\subset D$．用$M_1$记$|f(x,y)|$在矩形$R_1$上的最大值，并以$x_0^{(1)}$和$y_0^{(1)}$为初始值，经过与定理3.1同样的讨论，可以断定在区间

$$I_1:\quad x_0^{(1)}-h_1\leqslant x\leqslant x_0^{(1)}+h_1\quad 上,$$

即区间$x_0+h_0-h_1\leqslant x\leqslant x_0+h_0+h_1$上，方程（3.1）的以（$x_0^{(1)}$，$y_0^{(1)}$）为初值的解$y=\varphi_1(y)$存在，其中$h_1=min(a_1,\ \dfrac{b_1}{M_1})$；区间$I_1$的中心和区间$I$的右端点重合，且当$x=x_0^{(1)}$有$\varphi(x_0+h_0)=y_0^{(1)}=\varphi_1(x_0^{(1)})$．所以，由于唯一性，这两个解在区间$I$和$I_1$的公共部分上$\varphi(x)\equiv\varphi_1(x)$．但是区间$I_1$的一半$[x_0^{(1)},x_0^{(1)}+h_1]$，即$[x_0+h_0,x_0+h_0+h_1]$位于区间$I$之外，于是我们自然就把这半个区间上所求得的解$\varphi_1(x)$当作解$\varphi(x)$的**延展**．延展后所得的函数$\varphi(x)$仍然满足方程(3.2)和所给的初始条件．如果当$x=x_0^{(1)}+h_1$时，$\varphi(x_0^{(1)}+h_1)=y_0^{(2)}$，而且坐标为$x_0^{(1)}=x_0^{(1)}+h_1$，$y_0^{(2)}$的点仍然是区域$D$内的点，那么按照上面同样办法，可以就初值（$x_0^{(1)},y_0^{(2)}$）在区间$I_2$内确定一个解，区间$I_2$有一半和区间$I_1$重合，在其上新解和原有解重合；区间$I_2$的另一半位于$I_1$之外，这样又把$\varphi(x)$向右延展了，这样的手续可以继续下去．类似的方法

---

* 即对区域D内的每一点，有以它为中心的，完全属于D的闭矩形R存在，在R上$f(x,y)$关于y满足李普希兹条件．对于不同的点，矩形R的大小以及常数N可以不同．

如果区域D是凸的，即联接区域D任意两点的线段都整个包含在区域D内，而且在D内存在有界偏导数$f'_y(x,y)$，那么可用拉格朗日定理证明，$f(x,y)$在D内关于变量y满足全局李普希兹条件．

也可以将$\varphi(x)$向左〔即x减小的方向〕延展．用这样的延展办法我们有下面的定理．

定理3.2 如果方程（3.1）的右端函数$f(x,y)$在区域D上连续，且关于y满足局部李普希兹条件，则对于D上任意一点(x_0,y_0)，方程（3.1）的以(x_0,y_0)为初值的解$\varphi(x)$均可以向左右延展，直到$(x,\varphi(x))$任意接近区域D的边界．

这个定理我们不准备予以严格的证明，请读者参看复旦大学《微分方程》教材有关部分．

定理中最后一句话"$(x,\varphi(x))$任意接近区域D的边界"，我们指的是：如果D为有界区域，则积分曲线可以任意接近D的边界；如果D为无界区域，则或者积分曲线任意接近D的边界，或者积分曲线上的点可以无限远离原点．

下面的例子表明，即使D是整个xoy平面，但方程的初值解也未必能延展到在$(-\infty,+\infty)$存在．

例2． 试讨论方程$\dfrac{dx}{dy}=y^2$通过点（1,1）的解和通过点（3,−1)的解的存在区间．

解．此时区域D是整个平面．方程右端函数满足延展定理所要求的条件．容易算出，方程的通解是

$$y=\frac{1}{c-x},$$

故通过点（1,1）的积分曲线为

$$y=\frac{1}{2-x}.$$

它向左可以无限延展，而当$x\to 2-0$时，$y\to+\infty$．所以，其存在区间为$(-\infty,2)$，参看图3.3．

通过点（3,−1）的积分曲线为

$$y=\frac{1}{2-x},$$

它向左不能无限延展，因为当$x\to 2+0$时，$y\to-\infty$；所以其存在区间为$(2,+\infty)$．

顺便指出：这个方程只有解$y=0$可以向左右两个方向无限延展。

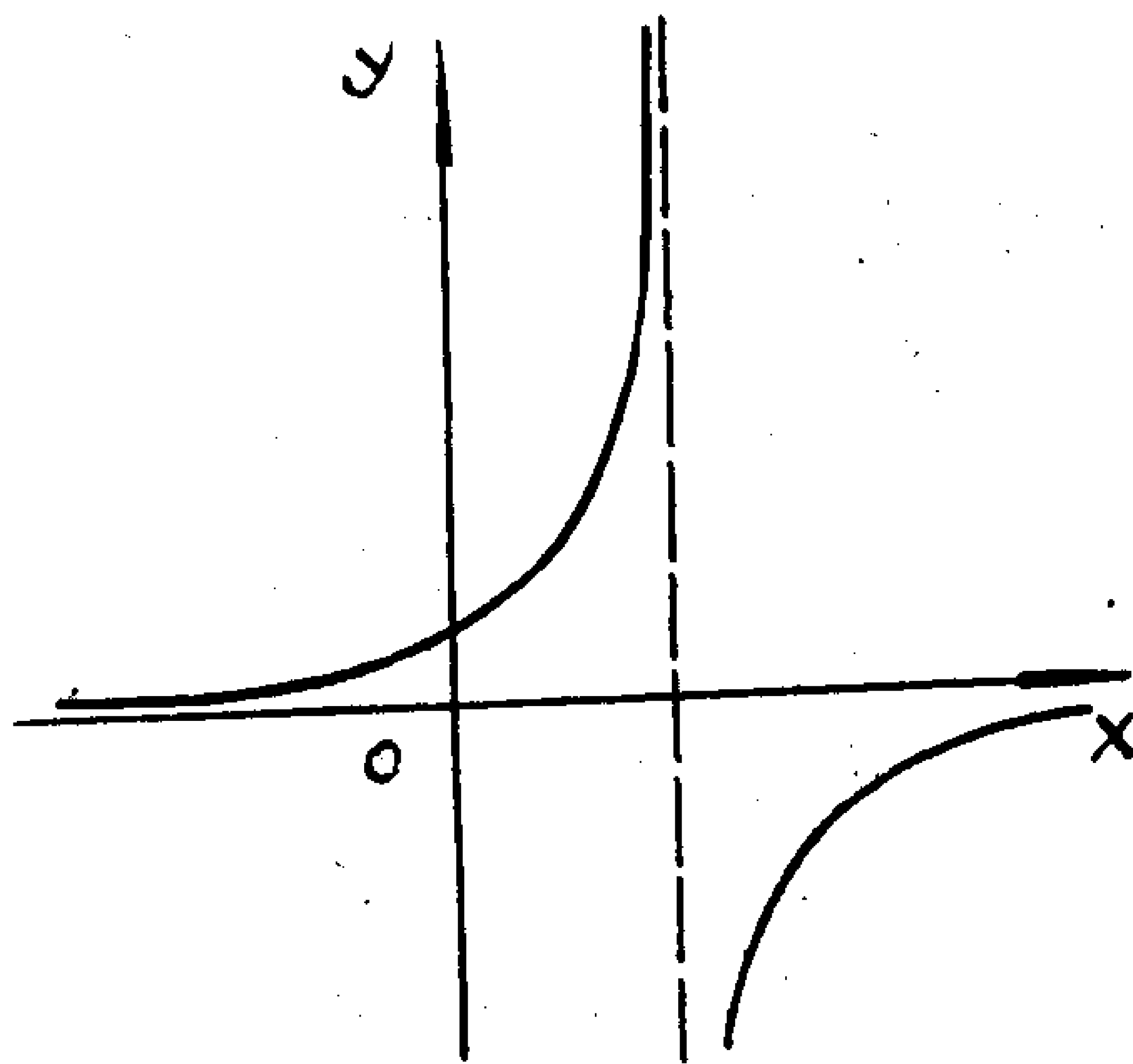


图 3.3

这个例子说明，尽管$f(x,y)$在整个平面满足延展定理条件，但方程的解却不一定能够延展到整个数轴上去．

延展定理在常微分方程理论研究中是一个经常用到的很有用的定理．我们来看下面的例子．

例3． 考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=(y^2-a^2)\cdot f(x,y),$$

假设$f(x,y)$及$f'_y(x,y)$在$x0y$平面上连续，试证明：对于任意x_0及$|y_0|<a$，方

程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解都在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在.

证明. 根据题设，可以证明方程右端函数在整个 xOy 平面上满足延展定理及存在与唯一性定理的条件. 易于看到，$y=\pm a$ 为方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解，由延展定理可知，满足

$$y(x_0)=y_0,\quad x_0\text{任意},\quad |y_0|<a$$

的解 $y=y(x)$ 上的点应当无限远离原点，但是，由解的唯一性，$y=y(x)$ 又不能穿过直线 $y=\pm a$，故只有可能向两侧延展，而无限远离原点，从而这解应在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在.

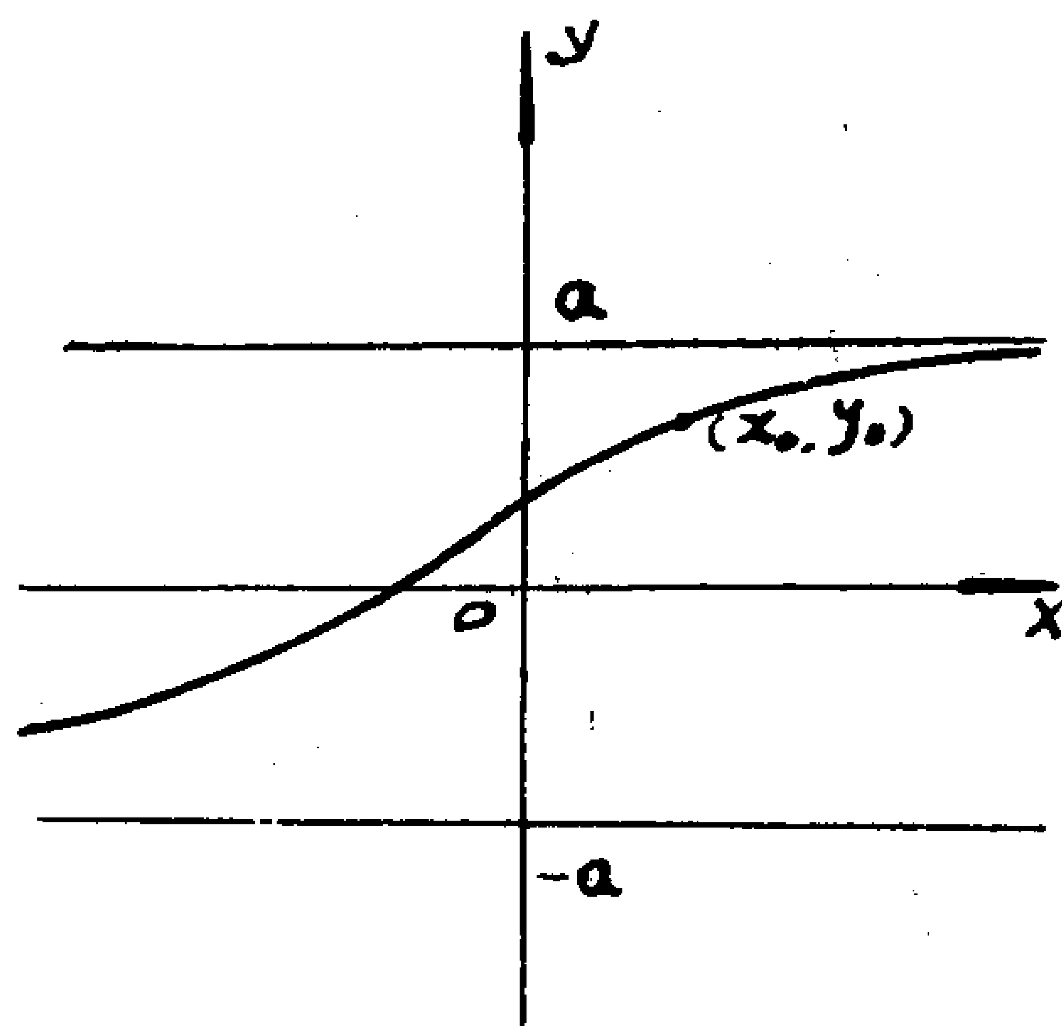


图 3.4

2°. 在解决很多问题时，我们经常将延展定理与**比较定理**配合使用. 下面就来介绍比较定理.

我们在考察方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (3.1)$$

之外，还同时考察方程

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y) \qquad (3.1)'$$

我们有如下的定理：

第一比较定理 设函数 $f(x,y)$, $F(x,y)$ 定义在某个区域G上，且满足如下的条件：

1) 在G上满足存在与唯一性定理条件；

2) 在G上有不等式

$$f(x,y)<F(x,y),$$

则方程(3,1)的满足初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的解 $\varphi(x)$ 和方程(3,1)′的满足 $\Phi(x_0)=y_0$ 的解 $\Phi(x)$ 在它们共同存在的区间上，满足不等式

$$\varphi(x)<\Phi(x),\quad \text{当 } x>x_0\text{时；}$$
$$\varphi(x)>\Phi(x),\quad \text{当 } x<x_0\text{时.}$$

证明. 由条件1)，根据定理3.1，方程(3.1)以及方程(3.1)′的满足 $y(x_0)=y_0$ 的解在 x_0 的某邻域上存在且唯一，它们都满足 $\varphi(x_0)=\Phi(x_0)=y_0$.

现讨论函数 $z(x)=\Phi(x)-\varphi(x)$. 因为

$$z(x_0)=0,\ z'(x_0)=\Phi'(x_0)-\varphi'(x_0)=F(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)>0,$$

所以，函数 $z(x)$ 在点 x_0 某个邻域内是增加的，且在点 x_0 的右边为正. 因为函数 $z(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+h]$ 上连续，所以，如果不等式 $z(x)>0$ 不是对所有 $x>x_0$ 成立，则至少存在一点 x_1, $x_0<x_1\leqslant x_0+\delta$，使得 $z(x_1)=0$，同时，当 $x_0<x<x_1$ 时，$z(x)>0$，因此在点 x_1 应有

$$z'(x_1)=\Phi'(x_1)-\varphi'(x_1)=F(x_1,\Phi(x_1))-f(x_1,\varphi(x_1))\leqslant 0$$

但这是不可能的. 因为 $\Phi(x_1)=\varphi(x_1)$，而按假设应有

$$F(x_1,\ \Phi(x_1))-f(x_1,\varphi(x_1))>0,$$

矛盾. 因此，$z(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+h]$ 上恒为正，即有 $\Phi(x)>\varphi(x)$. 当 $x<x_0$ 时的部份

可类似证．定理证明毕．

上述定理可以推广成为下面的定理．

第二比较定理，设函数$f(x,y)$与$F(x,y)$定义在某个区域G上，且满足：

1）在G上满足存在与唯一性定理条件；

2）在G上有不等式

$$f(x,y)\leqslant F(x,y),$$

则（3.1）的满足$\varphi(x_0)=y_0$的解$\varphi(x)$与（3.1）′的满足$\Phi(x_0)=y_0$的解$\Phi(x)$在它们共同的存在区间上，满足不等式

$$\varphi(x)\leqslant\Phi(x),\quad 当\ x\geqslant x_0时，$$
$$\varphi(x)\geqslant\Phi(x),\quad 当\ x\leqslant x_0时．$$

也就是说，当右端函数的不等式为不严格时，解的不等式也变成不严格的．这个定理我们不予证明，请参看王柔怀、伍卓群著《常微分方程讲义》第五章，p.169—170．

例．试证对任意x_0，y_0，方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{x^2+y^2+1}$$

满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解均在$(-\infty,\ +\infty)$上存在．

证明．函数$\frac{x^2}{x^2+y^2+1}$在整个xoy平面上满足存在与唯一性定理条件，且有

$$0\leqslant\frac{x^2}{x^2+y^2+1}\leqslant 1$$

将原方程与方程

$$\frac{dy}{dx}=0\quad 及\quad \frac{dy}{dx}=1$$

比较，故原方程满足$y(x_0)=y_0$之解$y(x)$在其存在区间上，满足

$$y_0\leqslant y(x)\leqslant y_0+(x-x_0),\quad 当\ x\geqslant x_0时，$$
$$y_0+(x-x_0)\leqslant y(x)\leqslant y_0,\quad 当\ x\leqslant x_0时．$$

由延展定理，$y=y(x)$的积分曲线可以无限远离原点，故$y(x)$必在$(-\infty,\ +\infty)$上存在．

习　　题 3.2

1．试证明：对于任意的x_0及满足条件$0<y_0<1$的y_0，方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$的满足条件$y(x_0)=y_0$的解$y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$上存在．

2．指出方程$\frac{dy}{dx}=(1-y^2)e^{xy^2}$的每一个解的最大存在区间，以及当$x$趋于这区间的两端点时解的性状．

3．设$f(x,y)$在整个平面上连续有界，对y有连续偏导数，试证明方程$\frac{dy}{dx}=$ $=f(x,y)$的任一解$y=\varphi(x)$在区间$-\infty<x<+\infty$上有定义．

4. 讨论方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$的通过点（0.0）的解，以及通过点（$\ln 2$，$-3$）的解的存在区间．

5. 在方程

$$\frac{dy}{dx}=f(y)$$

中，如$f(y)$在（$-\infty$，$+\infty$）上连续，且

$$yf(y)<0 \quad (y\neq 0)$$

求证方程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解$y(x)$，存在区间为$[x_0,\ +\infty)$，且有

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$$

6. 设$f(x,y)$在xoy平面上连续可微，且$f(x,y_0)\equiv 0$．

求证：方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的非零解$y=\varphi(x)$，如果有$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$，则必有$x_0=+\infty$ 或 $x_0=-\infty$．

§3.3 解对初值的连续相依性

直到现在，我们都是把初值（x_0,y_0）看成固定的数值，然后再去研究微分方程（3.1）的经过点（x_0,y_0）的解．这个解是自变量x的函数．易于看出，当初值x_0和y_0变动时，对应的解也要跟着变动．所以，方程(3.1)的解也应该是初值x_0，y_0的函数．例如，方程

$$\frac{dy}{dx}=y$$

过点（x_0,y_0）的解为$y=y_0e^{x-x_0}$，它显然是所有变量x,x_0,y_0的函数．对于一般情形为了表示微分方程（3.1）过点（x_0,y_0）的解是所有变量x,x_0,y_0的函数，我们采用符号

$$y=\varphi(x,x_0,y_0),$$

按符号的定义，应有$\varphi(x_0,x_0,y_0)=y_0$．

现在提出一个应用上很重要的问题：当初值发生变化时，对应的解是怎样变化的？我们知道，很多自然现象的研究都可以归结为求某些微分方程满足其初值的解．但是，这些初值是要通过实验来测定的，因此所得到的数据总会有些误差．如果所测定的初始数据的微小的误差将会引起相应的解产生巨大的变化，那么所求的初值问题的解在实用上就不会有多大的价值．所以，实际应用上经常要求：在所研究的现象的某个有限过程中，当初值x_0，y_0变化不大时，相应的解也变化不大．下面给出其数学上的确切的定义．

定义．初值问题（3.2）的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$称为在$x_0\leqslant x\leqslant c$（或$c\leqslant x\leqslant x_0$）

上连续地依赖于初值x_0, y_0，假如对任意 $\varepsilon>0$，都能找到一个 $\delta=\delta(\varepsilon, x_0, y_0, c)>0$，使得对于满足$|x_0-\bar{x}_0|<\delta$，$|y-\bar{y}_0|<\delta$的一切 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$，恒有

$$|\varphi(x, x_0, y_0)-\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)|<\varepsilon, \tag{3.10}$$

$x_0 \leqslant x \leqslant c$（或$c \leqslant x \leqslant x_0$） （参看图3.5）.

容易直观地想象，如果所研究的过程延续越长，则要使相应解之间彼此相差很小，就应当使它们的初值之差越小. 确切地说，随着c的增大，一般说来，δ将变小，而且当$c \to +\infty$时，它可以趋于零. 因此，并不是总是可以找到δ，使不等式(3.10)对所有的$x>x_0$都满足的. 换句话说，彼此的初值很靠近的解，当x取得足够大时，它们之间并不一定永远是靠近的.

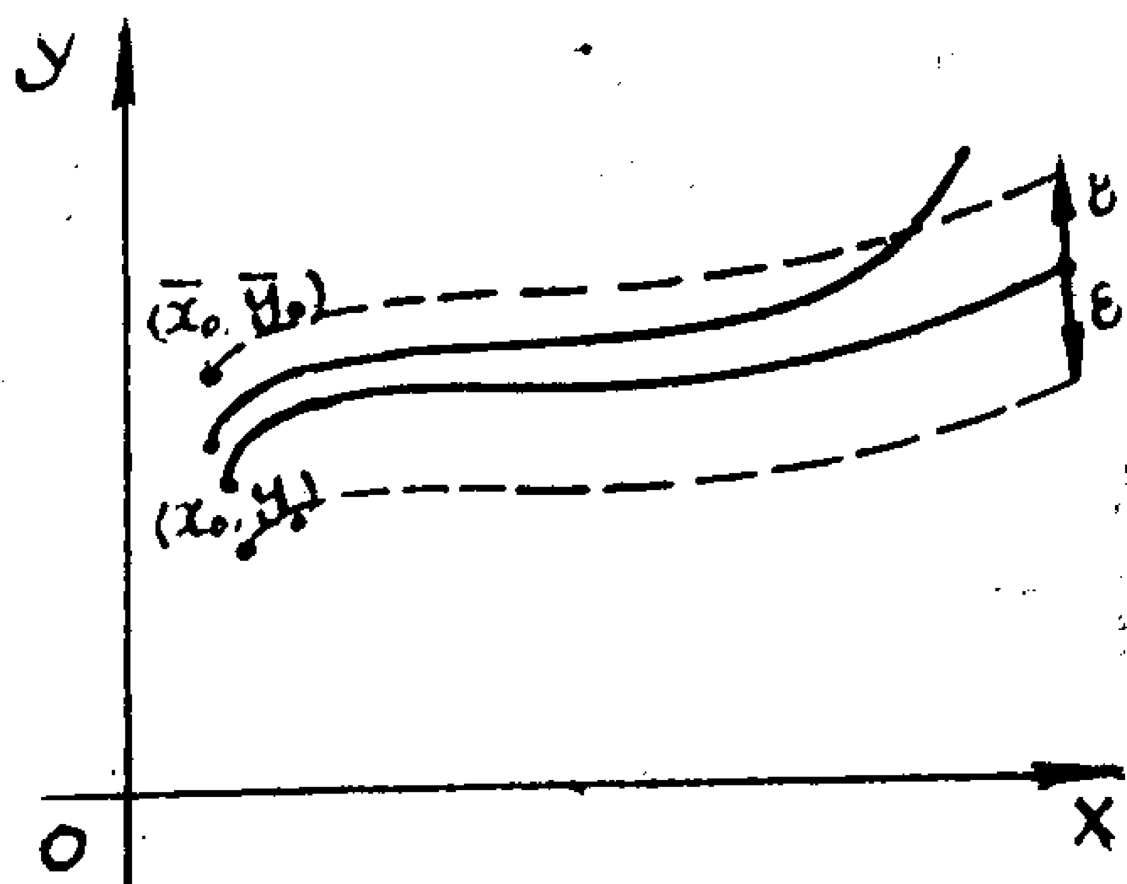


图 3.5

下面我们给出解对初值的连续相依性定理.

定理3.3 设$f(x, y)$在区域D内连续，且关于y满足李普希兹条件. 如果$(x_0, y_0) \in D$，初值问题（3.1）有解$y=\varphi(x, x_0, y_0)$，且当$a \leqslant x \leqslant b$时，$(x, \varphi(x, x_0, y_0)) \in D$，则对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对于满足

$$|\bar{x}_0-x_0| \leqslant \delta, \quad |\bar{y}_0-y_0| \leqslant \delta$$

的任意$(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x, y)' \\ y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0 \end{cases} \tag{3.11}$$

的解$y=\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$也在区间$[a, b]$上有定义，且有

$$|\varphi(x, x_0, y_0)-\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)|<\varepsilon.$$

证明 对给定$\varepsilon>0$，选取$0<\delta_1<\varepsilon$，使得闭区域U：

$$a \leqslant x \leqslant b, \ |y-\varphi(x, x_0, y_0)| \leqslant \delta_1$$

整个含在区域D内. 这是能够做到的，因为区域D是开的，且当$a \leqslant x \leqslant b$时，$(x, \varphi(x, x_0, y_0)) \in D$，所以，只要$\delta_1$选取足够小，以曲线$y=\varphi(x, x_0, y_0)$为中线，宽为$2\delta_1$的带形域就整个包含在区域$D$内，如图3.6所示.

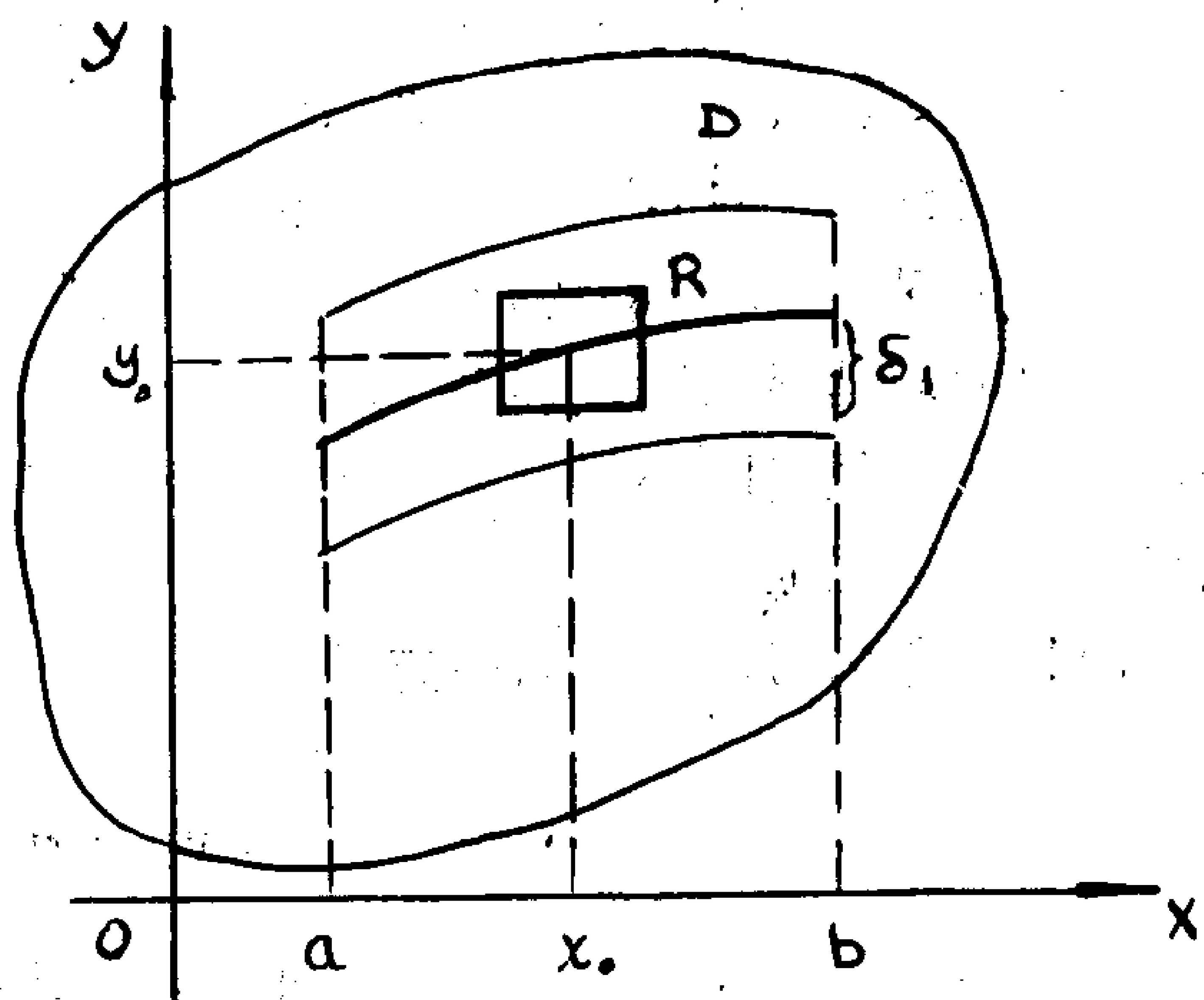


图 3.6

选取δ满足

$$0<\delta<\frac{\delta_1}{1+M}e^{-N(b-a)},$$

其中N为李普希兹常数，$M=\max\limits_{(x,y)\in U}|f(x,y)|$，另外，还要保证闭正方形

$$R:|x-x_0|\leqslant\delta,\ |y-y_0|\leqslant\delta$$

含于带形区域U的内部.

由存在唯一性定理可知，对于任一$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)\in R$，在$\bar{x}_0$的某邻域上存在唯一解$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$，且在$\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$尚有定义的区间上，有

$$\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)=\bar{y}_0+\int_{\bar{x}_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau,\bar{x}_0,\bar{y}_0))d\tau. \tag{3.12}$$

另外，还有

$$\varphi(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))d\tau.$$

对上述两式作差并估值：

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\leqslant\\
&\leqslant|\bar{y}_0-y_0|+\left|\int_{\bar{x}_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau,\bar{x}_0,\bar{y}_0))d\tau-\int_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))d\tau\right|\\
&\leqslant|\bar{y}_0-y_0|+\left|\int_{\bar{x}_0}^{x}|f(\tau,\varphi(\tau,\bar{x}_0,\bar{y}_0))-f(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))|d\tau\right|+\\
&\quad+\left|\int_{x_0}^{\bar{x}_0}|f(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))|d\tau\right|\leqslant\\
&\leqslant(1+M)\delta+N\left|\int_{\bar{x}_0}^{x}|\varphi(\tau,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(\tau,x_0,y_0)|d\tau\right|
\end{aligned}$$

由贝尔曼不等式，则有

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\leqslant(1+M)\delta e^{N|x-\bar{x}_0|}\leqslant\\
&\quad\leqslant(1+M)\delta e^{N(b-a)}\leqslant\delta_1<\varepsilon\ .
\end{aligned}\tag{3.13}$$

因此，只要在$\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$尚有定义的区间上，就有(3.13)式成立. 下面我们要证明：$\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$在区间〔$a$，$b$〕上有定义. 只证$\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$在区间〔$\bar{x}_0,b$〕上有定义. 对区间〔$a,x_0$〕可类似证明.

因为解$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$不能越过曲线$y=\varphi(x,x_0,y_0)+\varepsilon$及$y=\varphi(x,x_0,y_0)-\varepsilon$，但是，由解的延展定理，解$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$可以延展到无限接近区域$D$的边界，于是，它在向右延展时必须由$x=b$穿出区域$U$，从而$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$必须在〔$x_0$，$b$〕上有定义，定理证毕.

例4. 考虑与例1类似的方程

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}0\ , & y=0,\\ -y\ln|y|, & y\neq 0.\end{cases}$$

$y=0$为解，$y=\pm 1$为解，上半平面通解为$y=e^{ce^{-x}}$，下半平面通解为$y=-e^{ce^{-x}}$. 积分曲线大致如图3.7.

可以看到，对于 Ox 轴上的初值（x_0，0），在任意**有限的**区间上解对初值是连续相依．但是，在［0，+∞］上，无论$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$如何接近（x_0，0），当x充分大时，过$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$的积分曲线就不能与过（x_0，0）的积分曲线（即$y=0$）任意接近了．

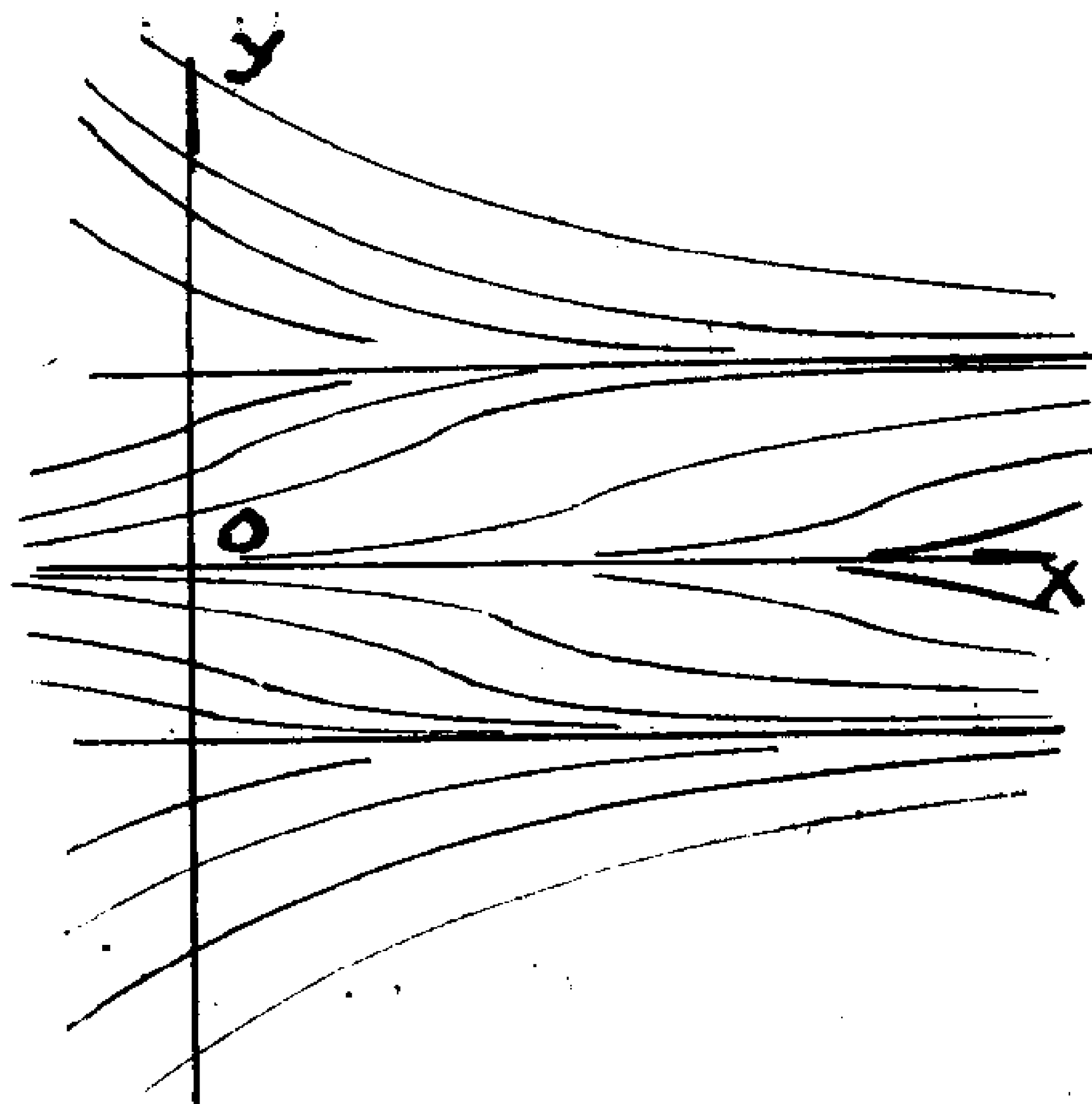


图 3.7

这个例子说明，解在有限区间上对初值的连续相依性不能推出解在无限区间上对初值的连续相依性．讨论后一问题属于稳定性理论，我们将在第六章作简略地介绍．

§3.4 解对初值的可微性

我们时常不但要求知道解对初值的连续相依，而且还要知道解对初值的偏导数是否存在．下面给出这方面的一个定理，但在证明中有些细节不去严格追究．

定理3.4 （解对初值的可微性）如果函数$f(x,y)$以及$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$在区域$D$内连续，则初值问题（3.1）的解$\varphi(x,x_0,y_0)$作为$x,x_0,y_0$的函数，在它有定义的范围内有连续偏导数$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$.

证明．（1）首先证明$\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$存在且连续．

从导数的定义出发，我们应当证明：当$\Delta y_0\to 0$时，差商

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta y_0}=\frac{\varphi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)}{\Delta y_0}$$

的极限存在且连续．显然有

$$\varphi(x,x_0,y_0+\Delta y_0)=y_0+\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0+\Delta y_0))d\tau$$

及

$$\varphi(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))d\tau,$$

两式相减得

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta y_0}=1+\int_{x_0}^{x}[f'_y(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))+r]\frac{\Delta\varphi}{\Delta y_0}d\tau \qquad (3.14)$$

其中r是$\tau,x_0,y_0,\Delta y_0$的某函数．当$\Delta y_0\to 0$时，r对τ而言一致地趋于零．

对照（3.14），我们考虑下列线性方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=f'_y(x,\varphi(x,x_0,y_0))z, \\ z(x_0)=1. \end{cases} \tag{3.15}$$

由于 $f'_y(x,y)$ 和$\varphi(x,x_0,y_0)$连续，因而上述初值问题存在唯一解$z(x,x_0,y_0)$，且显然有

$$z(x,x_0,y_0)=1+\int_{x_0}^{x} f'_x(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))z(\tau,x_0,y_0)d\tau.$$

令 $u=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta y_0}-z$，由（3.14）减去上式，得

$$u=\int_{x_0}^{x}\{[f'_y(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0)+r]u+rz\}d\tau,$$

从而有

$$|u|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\{|[f'_y(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0)|+|r|]|u|+|r|\cdot|z|\}d\tau\right|.$$

如果注意到 $f'_y(x,y)$ 和 $z(x,x_0,y_0)$ 有界，以及当 $\Delta y_0\to 0$ 时，r 关于 τ 一致趋于零，即任给 $\varepsilon>0$，恒存在$\eta>0$，只要$|\Delta y_0|<\eta$ 时，对任一 τ 恒有 $|r|<\varepsilon$；那么上一不等式可进一步写成

$$|u|\leqslant\varepsilon Lh_0+(M+1)\left|\int_{x_0}^{x}|u|d\tau\right|,$$

其中 L，M当某正常数．由贝尔曼不等式，得

$$|u|\leqslant\varepsilon Lh_0e^{(M+1)|x-x_0|}\leqslant\varepsilon Lh_0e^{2(M+1)h_0}.$$

上式表明当 $\Delta y_0\to 0$时，u一致地趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta y_0\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta y_0}=z$．这表明$\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$ 存在且等于 $z(x,x_0,y_0)$，而且是连续的．

（2）其次证明$\dfrac{\partial\varphi(x_1,x_0,y_0)}{\partial x_0}$存在且连续．

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}&=\frac{\varphi(x,x_0+\Delta x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)}{\Delta x_0}\\&=\frac{1}{\Delta x_0}\Big[\int_{x_0+\Delta x_0}^{x}f(\tau,\varphi(x,x_0+\Delta x_0,y_0))d\tau-\\&\quad\int_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))d\tau\Big]\\&=-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(\tau,\varphi(\tau,x_0+\Delta x_0,y_0))d\tau+\\&\quad+\int_{x_0}^{x}[f'_y(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))+r]\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_0}d\tau.\end{aligned}$$

不难看到，完全重复（1）中的推理，可以证明，$\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$是线性方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = f'_y(x, \varphi(x, x_0, y_0))z, \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) \end{cases} \tag{3.16}$$

的解．定理证毕．

附注1． 初值问题（3.15）和(3.16）中的方程

$$\frac{dz}{dx} = f'_y(x, \varphi,(x, x_0, y_0))z$$

称为方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

对解 $\varphi(x, x_0, y_0)$ 关于初值的**变分方程**，且由（3.15）和（3.16）给出**解对初值的微商公式**

$$\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} f'_y(\tau, \varphi(\tau, x_0, y_0))d\tau},$$

及
$$\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)e^{\int_{x_0}^{x} f'_y(\tau, \varphi(\tau, x_0, y_0))d\tau}.$$

附注2． 在第一章里，我们曾经把(3.1)的通解定义为，含有一个任意常数的且包含微分方程在某区域的所有解的共同表达式．现在有了上述基本理论，可以对通解与通积分的概念加以确切的说明了，并证明其存在性．

考察方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3.1}$$

假定在某一区域D内，函数$f(x,y)$及$f'_y(x,y)$连续．从而方程（3.1）满足解的存在与唯一性定理的条件．若任取一开区域$D' \subset D$，且（x_0, y_0）$\in D'$，则方程（3.1）存在一且唯一的满足初始条件 $y(x_0) = y_0$的解：

$$y = \varphi(x, x_0, y_0), \quad y_0 = \varphi(x_0, x_0, y_0).$$

如果固定初值x_0，让初值y_0当作可取各种数值的参数，只要（x_0, y_0）$\in D'$时，方程（3.1）都存在唯一满足相应的初始条件的解．这样，我们就得到了连续依赖于一个任意常数的解族（参看§3.3）：

$$y = \varphi(x, y_0).$$

它就是在**区域 D 内的通解**.

现在考察过区域 D' 内一点（x_0, y_0）的积分曲线

$$y = \varphi(x, x_0, y_0),$$

以及其上一点（x，y）．上述关系式一方面联系着(x_0, y_0)，另一方面联系着(x，y)．如果现在取点（x，y)作为初值．那么，由于唯一性，积分曲线又经过(x_0, y_0)．因为就区域 D' 来说，$y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 说明函数对自变量以及初值之间关系，因此有

$$y_0 = \varphi(x_0, x, y).$$

在这个等式中再将x_0看作定数，将y_0看作任意常数，我们便得

$$\psi(x,y)=c.$$

它也就是方程（3.1）在区域D内的通积分，根据§3.4上式左端函数关于x，y都有连续偏导数.

§3.5 关于微分方程组的基本定理

上面几节的基本结论可以直接推广到如下的标准型微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\end{cases}\tag{3.17}$$

其中f_1，$f_2,\cdots,f_n$是n个定义于（$x,y_1,y_2,\cdots y_n$）空间某一区域D内的连续函数.

在此不妨复习一下有关方程组（3.17）的解和初值的概念.

假设n个函数$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$在区间$I$：$a\leqslant x\leqslant b$上有连续导数，若以$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$代替（3.17）中的$y_1,y_2\cdots,y_n$，得到关于$x$的恒等式

$$\frac{\varphi_k(x)}{dx}\equiv f_k(x,\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)),$$

$$(a\leqslant x\leqslant b,\quad k=1,2,\cdots,n).$$

我们就称函数组$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$是微分方程组(3.17)在**区间I上的一个解.**

假设点（$x_0,y_1^{(0)}$，$y_2^{(0)},\cdots,y_n^{(0)}$)$\in D$，方程组（3.17）的**初值问题**指的是：求方程组（3.17）一个解$\varphi_k(x)$($k=1,2,\cdots,n$)，它在某个包含x_0的区间I上有定义，且满足初值条件$\varphi_k(x_0)=y_k^{(0)}$（$k=1,2,\cdots,n$）.

关于标准型的一阶微分方程组（3.17）的初值问题的解的存在性和唯一性定理的证明，完全类似于定理（3.1），也可采用逐次逼近法. 所以我们在这里仅叙述这个定理而不加以证明. 详细的证明过程可参阅叶彦谦著《常微分方程讲义》（1979，人民教育出版社）.

定理3.5 关于标准型的一阶微分方程组(3.17)，假设函数$f_k(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$($k=1,2,\cdots,n$)满足如下的条件：

1） 函数$f_k(k=1,2,\cdots,n)$在$n+1$维空间的长方体R：

$$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\quad y_k^{(0)}-b\leqslant y_k\leqslant y_k^{(0)}+b\ (k=1,2,\cdots,n)$$

上连续. 由于f_k在闭长方体R上连续，因而在R上有界，即存在这样的正数M，使得

$$|f_k(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)|\leqslant M\qquad (x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\in D$$

$$(k=1,2,\cdots,n),$$

2） 在R上，这些函数关于变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$满足李普希兹条件，即对R上的任何一对点，$(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$(x,\bar{y}_1,\bar{y}_2\cdots,\bar{y}_n)$，有下面不等式

$$|f_k(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)-f_k(x,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n)|$$

$$\leqslant L(|y_1-\bar{y}_1|+|y_2-\bar{y}_2|+\cdots+|y_n-\bar{y}_n|),$$
$$(k=1,2,\cdots,n),$$

其中L是某一正常数，那么在区间$x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$上，其中$h_0=min(a,\frac{b}{M})$，方程组（3.17）有且仅有一个解，满足$\varphi_k(x_0)=y_k^{(0)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

由定理所得到的解仅在区间$[x_0-h_0, x_0+h_0]$上有定义. 与§3.2所采用的办法一样，我们可以把解进行延展，使得过点$(x_0,y_1^{(0)},y_2^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})$的积分曲线$\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$可以任意接近函数f_k满足条件1）和2）的区域D的边界.

方程组（3.17）的解对初值的连续相依性和可微性，证明比较繁难（但基本思路一样），在此就不仔细地叙述了.

§3.6 关于高阶微分方程式的基本定理

标准型的n阶微分方程式有如下形式

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) \tag{3.18}$$

高阶微分方程式（3.18）的解的存在性与唯一性定理可以转化为一阶标准型的微分方程组相应的定理. 事实上，引进新的未知函数后，

$$y_1=y,\quad y_2=\frac{dy}{dx},\ \cdots,\ y_n=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

就可把方程（3.18）化为一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_3,\\ \cdots\quad\cdots\\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx}=y_n,\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f(x,y_1,y_2,\cdots,y_n).\end{cases} \tag{3.19}$$

如果$y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x),\cdots,y_n=\varphi_n(x)$在区间$I$：$a\leqslant x\leqslant b$上是方程组（3.19）的一个解，那么函数组第一个函数$y=\varphi_1(x)$就是n阶方程式（3.18）在I上的解. 事实上，因为

$$\varphi_2(x)\equiv\frac{d\varphi_1(x)}{dx},\quad \varphi_3(x)\equiv\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\equiv\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2},\ \cdots,$$

$$\varphi_n(x)\equiv\frac{d\varphi_{n-1}(x)}{dx}\equiv\frac{d^{n-1}\varphi_1(x)}{dx^{n-1}}$$

$$\frac{d^n\varphi_1(x)}{dx^n}\equiv\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x))\equiv$$

$$\equiv f(x,\varphi_1(x),\frac{d\varphi_1(x)}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}\varphi_1(x)}{dx^{n-1}}).$$

反之，如果$y=\varphi_1(x)$是方程（3.18）在区间I上的解，那么函数组

$$y_1=\varphi_1(x), y_2=\frac{d\varphi_1(x)}{dx}, \cdots, y_n=\frac{d^{n-1}\varphi_1(x)}{dx^{n-1}}$$

在区间I上就是方程组（3.19）的一个解．事实上，由$y_1, y_2, \cdots, y_n$的定义，方程组（3.19）的前$n-1$个方程是满足的，最后一个方程由于$\varphi_1(x)$是方程（3.18）的解而得到满足．

因此，把上节所叙述的定理3.5直接应用到(3.19)，以及注意到上面所说的方程式（3.18）与方程组（3.19）之间解的转化关系，立即得到下面关于n阶方程式（3.18）的初值问题的解的存在性与唯一性定理．

定理3.6 对于n阶微分方程式（3.18），如果它的右端函数f对于所有变量连续，而且关于变量y，$\frac{dy}{dx}$，…，$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$满足李普希兹条件，则方程（3.18）存在唯一的一个解$y=\varphi_1(x)$，且当$x=x_0$时，满足初始条件

$$\varphi_1(x_0)=y_0,\ \varphi_1'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

第 三 章 习 题

1．方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$中的$p(x)$和$q(x)$在〔a，b〕上连续，且$q(x)<0$.试证：对于方程的任一非零解$y=y(x)$,函数$f(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}y(x)y'(x)$严格单调递增．

2．在条形区域$a\leqslant x\leqslant b$，$|y|<+\infty$内，假设方程（3.1）的所有解都唯一，对其中任意两个解$y_1(x)$，$y_2(x)$，如果有$y_1(x_0)<y_2(x_0)$，则必有$y_1(x)<y_2(x)$.

3．$f(x)$定义在（$-\infty$，$+\infty$）上，且有$|f(x_1)-f(x_2)|<N|x_1-x_2|$，$N<1$，试证明方程$f(x)=x$只有一个解．

4．设函数$f(x,y)$在区域：

$$a\leqslant x\leqslant b,\ -\infty<y<+\infty$$

上对x连续，对y的偏导数处处存在，且

$$0<m\leqslant f_y'(x,y)\leqslant M,$$

试用逐次逼近法证明方程$f(x,y)=0$在$a\leqslant x\leqslant b$上有且仅有一个连续解．

5．设D为xoy平面上的一个区域，函数$f(x,y)$在D上连续，且对y是单调非增，则方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的右行解恒由初值唯一确定．

6．方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$在R：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$上连续且满足李氏条件．此外，$\max|f(x,y_0)|=M_0$，$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a$，则方程解的存在区间为：

$[x_0-h, x_0+h]$，其中 $h=min\left[a, \frac{1}{h}\ln(1+\frac{Nb}{M_0})\right]$.

7. 设 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 分别是方程 $\frac{dx}{dt}=f(t,y)$ 与 $\frac{dy}{dt}=g(t,y)$ 满足同一初始条件

$$t=t_0;\ x(t_0)=y(t_0)$$

的两个解，求证 $\frac{x(t)-y(t)}{t-t_0}$ 有界.

8. 设函数 $f(x,y)$ 在 xoy 平面的区域 G：

$$a<x<b, -\infty<y<+\infty$$

上连续．求证：若 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{E}$$

的过同一点 (x_0,y_0) 的两个解，且在 (a,b) 上有 $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$，则域 G 之介于 $y=\varphi_1(x)$ 与 $y=\varphi_2(x)$ 间的部分被（E）经过 (x_0,y_0) 的解所充满.

9. 试用贝尔曼不等式证明：设方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{*}$$

如果（1）$f(x,y)$ 于区域 D 内连续且满足李氏条件；

（2）$y=\varphi(x)$ 是方程（*）的定义于 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的解，且 $y_0=\varphi(x_0)$；则对于 $\varepsilon>0$，恒存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何适合

$$|R(x,y)|<\delta(\varepsilon) \qquad ((x,y)\in D)$$

的连续函数 $R(x,y)$，方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)+R(x,y)$$

的满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=\widetilde{\varphi}(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义，且

$$|\widetilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

10. 已知方程

$$\frac{dy}{dx}=\sin(xy).$$

试求

$$\left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right]_{\substack{x_0=0\\y_0=0}},\ \left[\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right]_{\substack{x_0=0\\y_0=0}}.$$

11. 设 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解，试证明

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}f(x_0,y_0)=0.$$

第四章　线性微分方程

在微分方程理论中，线性方程通常是被列为加以特殊研究的一类方程．因为，一方面，它在物理，力学，工程技术中有着广泛的应用，例如，机械系统及电磁系统中很多问题均可归结为这类问题的研究；另一方面，它的理论已发展比较完整．是研究非线性方程的基础．特别是，它与初等代数联系密切，几乎涉及到它的全部内容，例如，因式分解，求根公式，方程组理论以及行列式知识等等．因而通过本章学习，对于初等代数的有关内容无疑地将起到巩固与加深理解的作用．

本章主要介绍线性方程的一般理论和常系数线性方程的解法．此外，还要对它的应用，幂级数解法及解的振动性质作简单的介绍．

§4.1 线性方程的一般性质

在介绍线性方程一般性质以前．先来研究一个实际例子．

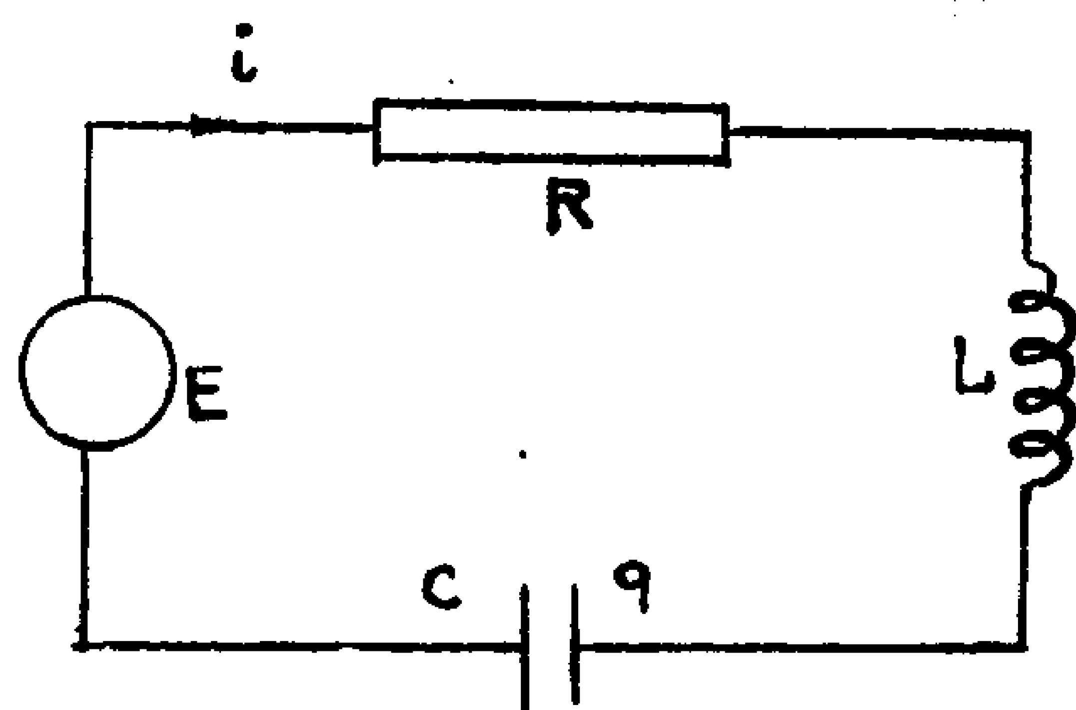


图　4.1

设有一简单电路，如图4.1所示．它由四个元件组成．其中电动势E，电阻R，电感L的作用在第一章§1.4中已讲过了，下面介绍电容器c，电容器的电容量在此我们也用c表示，它所贮藏的电荷量为q．这时电容器的两个极板分别带着等量但符号相反的电荷，极板间的电位差等于

$$E_c=\frac{1}{c}q .$$

此外，当电路中流过交流电时，电容器极板上的电荷量以及符号均随时间发生变化．根据电流定义，这时有

$$I=\frac{dq}{dt}.$$

根据基尔霍夫（*Kirchhoff*）定律，在闭合回路中全部元件的电位差的代数和等于零，即

$$E-RI-L\frac{di}{dt}-\frac{1}{c}q=0,$$

整理后可得

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}q=E. \tag{4.1}$$

考虑到$\frac{dq}{dt}=i$，（4.1）式可写成

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=E, \tag{4.2}$$

于是，得到了关于电荷量q的方程.

如果式（4.1）两端对t求导数，并假设E是常量（直流电压），则可得关于电流的方程

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=0. \tag{4.3}$$

下面再介绍一个力学上的例子．生产实践中很多的机械振动问题都归结为弹性振动的研究．下面介绍弹簧振动的一个典型例子．设有一个弹性系数为c而自然长度为l的弹簧竖直悬挂着，它的上端固定，下端系以重量为p的物体．现在来求该物体的运动微分方程式.

设物体运动时受到的介质阻力与它的速度成正比，比例系数为$\mu\geqslant 0$，施加于物体上的外力为$f(t)$，为简单起见，取通过悬挂点的直线为ox轴，向下方向为正向，物体的平衡位置取作坐标原点o，设λ表示在时刻t弹簧的伸长，而$\tilde{\lambda}$表示弹簧的静止伸长，即弹簧系重物后的长度与其自然长度之差，则

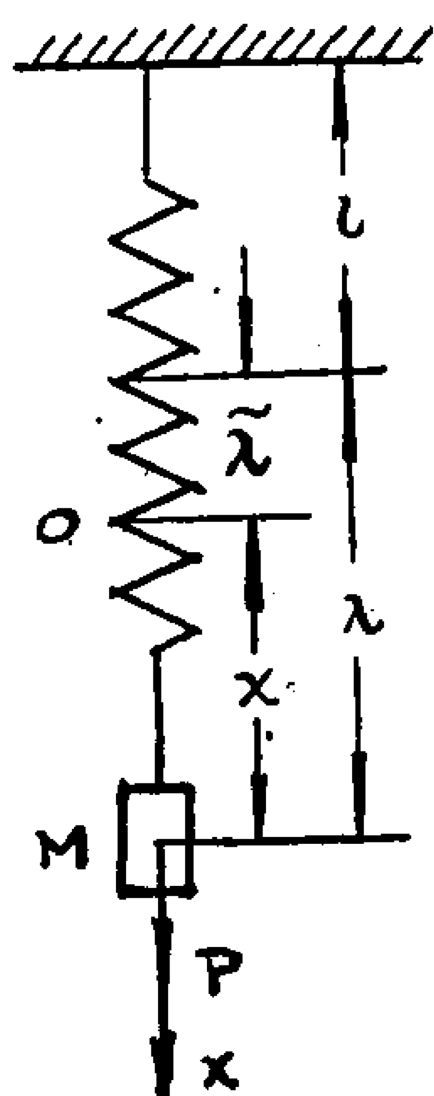


图 4.2

$$\lambda=\tilde{\lambda}+x \qquad 或\ \lambda-\tilde{\lambda}=x,$$

其中，x表示物体在t时刻的瞬时位移（图4.2）．由牛顿第二定律知，$F=ma$，其中，$m=\frac{p}{g}$是已知物体的质量，$a=\frac{d^2x}{dt^2}$是物体的加速度，而F是作用于物体上的合外力.

这时，合外力由如下几部分构成：1）弹簧的恢复力，依虎克定律它等于$-c\lambda$；2）物体所受到的重力$p=c\tilde{\lambda}$；3）介质的阻力$R=-\mu v$，其中，$v=\frac{dx}{dt}$是物体的速度；4）外力$f(t)$；即

$$F=-c\lambda+c\tilde{\lambda}-\mu\frac{dx}{dt}+f(t)=-cx-\mu\frac{dx}{dt}+f(t).$$

因而，最后可得已知物体的运动微分方程：

$$m\frac{d^2x}{dt}+\mu\frac{dx}{dt}+cx=f(t) \tag{4.4}$$

它所描述的是该物体在外力$f(t)$的经常作用下的运动，故称阻尼强迫振动.

实验表明，这时已知物体在平衡位置附近振动，但是，要从数量关系上弄清楚，倒底是怎样振动的（位移和时间的关系）？频率如何？周期等于多少？运动状态和阻尼关系怎样？当物体受到外力（瞬时作用与经常作用）时，运动状况如何？还有所谓共振现象等等（对于系统(4.2)，(4.3)也可以提出一系列类似问题）．为了回答这一系列问题，必须对这类方程进行深入地研究，包括研究这类方程的解法及解的性质等等.

不难发现，不论方程(4.2)，(4.4)还是(4.3)，都具有一个明显的特点，就是在这些方程中关于未知函数及其导数都是一次的．因此，这些方程称为线性微分方程式．又

由于出现在上述方程中的导数的最高阶数为2，和代数方程类似，我们称上述方程为二阶线性微分方程.

作为例子，还可以举出更多的线性方程，如

$$x^2y''+xy'+(x-n^2)y=0 \tag{4.6}$$

与

$$y''-xy=0 \tag{4.7}$$

都是二阶线性方程.

而

$$y'''-3y''+9y'+13y=0 \tag{4.8}$$

与

$$y'''-6y''+5y=-3e^x+5x^2 \tag{4.9}$$

都是三阶线性方程.

一般说来，n阶线性微分方程（或简称n阶线性方程）具有如下形状：

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=\varphi(x). \tag{4.10}$$

如果$a_0(x)$在某一区间$(a,\ b)$上恒不为零，用$a_0(x)$去除（4.10）式两端，便可得到形如

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \tag{4.11}$$

的方程，其中

$$p_k(x)=\frac{a_k(x)}{a_0(x)}(k=1,2,\cdots,n),\qquad f(x)=\frac{\varphi(x)}{a_0(x)}.$$

如无特殊声明，我们总假设$a_0(x)\neq 0$，因而，为简单起见，以下我们仅研究形如（4.11）的方程.

定理4.1 如果方程(4.11)的系数$p_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$及其右端函数$f(x)$在区间$(a,\ b)$上有定义且连续，则对于$(a,\ b)$上的任一x_0及任意给定的$y_0, y_1', \cdots, y_0^{(n-1)}$，方程（4.11）的满足初始条件

$$x=x_0;\quad y=y_0,\quad y'=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \tag{4.12}$$

的解存在且唯一.

证明 将方程（4.11）改写成

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=f(x)-p_1(x)y^{(n-1)}-\cdots-p_{n-1}(x)y'-p_n(x)y=\\&=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).\end{aligned} \tag{4.11'}$$

根据假设，不难看出，函数$F(x,\ y,y',\cdots,y^{(n-1)})$在区域

$$R:\ a<x<b,\ |y|<+\infty,\ |y'|<+\infty,\ \cdots,\ |y^{(n-1)}|<+\infty$$

上连续. 由于R是开域，故总存在一闭域

$$D:\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta;\ |y|\leqslant\bar{y},\ |y'|\leqslant\bar{y}_1,\ \cdots,\ |y^{n-1}|\leqslant\bar{y}_{n-1},$$

使得一方面它包含有初始条件（4.12）所确定的点，同时它本身又完全被包含在R之中.

由假设知，函数$F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$在$R$上，从而在$D$上连续，同时，还由于

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}=-p_{n-k}(x) \qquad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

在〔α，β〕上连续，故该函数在D内对y，$y'\cdots$，$y^{(n-1)}$满足李普希兹条件，因而，根据定理3.6，方程(4.11′)或(4.11)满足条件(4.12)的解存在且唯一。

和一阶方程类似，可以证明方程（4.11）的由初始条件（4.12）所确定的解在其系数$p_k(x)$　($k=1,2,\cdots,n$)和$f(x)$之连续区间（a．b）上存在且唯一．

如无特别声明，在下述讨论中，总认为（4.11）的系数$p_k(x)$（$k=1,2,\cdots,n$）及其右端函数$f(x)$在（a，b）上连续，从而，方程（4.11）之满足条件（4.12）的解在整个区间（a，b）上总存在且唯一．

如果$f(x)$在（a，b）上恒等于零，（4.11）将变成

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (4.13)$$

的形状．方程（4.13）称为**n阶线性齐次微分方程**（或简称n阶齐次方程），与此相应，（4.11）称为**n阶线性非齐次微分方程**（或简称n阶非齐次方程）．有时，为了叙述上的方便，还称（4.13）为（4.11）的**对应的齐次方程**．例如，(4.4) 为二阶非齐次方程；（4.3），（4.6），（4.7）为二阶齐次方程；（4.8）为三阶齐次方程，（4.9）为三阶非齐次方程．

为了今后在书写上的方便，引入下述符号

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y, \qquad (4.14)$$

（4.14）称为**线性微分算子**．

使用符号（4.14），非齐次方程（4.11）可改写成

$$L[y]=f(x),$$

齐次方程可改写成

$$L[y]=0.$$

算子具有如下性质．

1．常数因子可以提到算子符号外面：

$$L[ky]=kL[y].$$

实际上，

$$\begin{aligned}L[ky]&=[ky]^{(n)}+p_1(x)[ky]^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)[ky]'+p_n(x)[ky]\\&=ky^{(n)}+kp_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+kp_{n-1}(x)y'+kp_n(x)y\\&=k[y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y]\\&=kL[y].\end{aligned}$$

2．算子作用于两个函数和的结果等于算子分别作用于各个函数的结果之和：

$$L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2].$$

实际上，

$$\begin{aligned}L[y_1+y_2]=&[y_1+y_2]^{(n)}+p_1(x)[y_1+y_2]^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)[y_1+y_2]'\\&+p_n(x)[y_1+y_2].\\=&y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y_1'+p_n(x)y_1+y_2^{(n)}\\&+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y_2'+p_n(x)y_2\end{aligned}$$

$=L[y_1]+L[y_2].$

§4.2 n阶线性齐次微分方程

我们先来研究线性齐次方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \tag{4.13}$$

的一般理论.

1° 由线性算子的性质证明线性齐次方程（4.13）的解的如下性质：

（1）如果 y_1 是（4.13）的解：

$$L[y_1]\equiv 0,$$

则对任意常数 c，函数

$$y=cy_1$$

也是方程（4.13）的解.

实际上，

$$L[cy_1]\equiv cL[y_1],$$

由假设知，$L[y_1]\equiv 0$，故有

$$L[cy_1]\equiv 0.$$

（2）如果 y_1，y_2，…，y_n 是（4.13）的解，则对任意 n 个常数 c_1，c_2，…，c_n，线性组合

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n=\sum_{k=1}^{n}c_ky_k$$

也是（4.13）的解.

实际上，因 $y_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为(4.13)的解，所以有 $L[y_k]\equiv 0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，从而

$$L[\sum_{k=1}^{n}c_ky_k]\equiv\sum_{k=1}^{n}L[c_ky_k]\equiv\sum_{k=1}^{n}c_kL[y_k]\equiv 0,$$

即

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$$

是（4.13）的解.

由性质（1）及性质（2）可以立刻看出，齐次方程（4.13）的解集合构成了一个线性空间.

例1. 易于验证函数 $y_1=\cos x$，$y_2=\sin x$ 是方程

$$y''+y=0$$

的解. 因而，依性质（2），函数

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

也是原方程的解，其中 c_1，c_2 是任意常数.

2° 在证明了性质（2）之后自然要问，如果 y_1，y_2，…，y_n 是（4.13）的 n 个解，则含有 n 个任意常数 c_1，c_2，…，c_n 的方程（4.13）的解

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny$$

是否就是齐次方程（4.13）的通解呢？为回答这一问题，我们首先来介绍函数组在已知区间上线性相关和线性无关的概念.

定义 4.1 函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 称为在区间 (a, b) 上是**线性相关的**，如果存在一组不全为零的常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n=0 \tag{4.15}$$

在 (a, b) 上恒成立. 反之，则称函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在区间 (a, b) 上**线性无关**.

由定义不难推出如下的两个结论：

(1) 在函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中如果有一个函数，例如 y_k 在 (a, b) 上恒等于零：

$$y_k\equiv 0 \qquad (a<x<b),$$

则 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在 (a, b) 上线性相关（自然要假设 $y_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 在 (a,b) 上有定义）.

实际上，对任一 $\alpha_k\neq 0$，及 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{k-1}=\alpha_k+1=\cdots=\alpha_n=0$，(4.15) 式在 (a, b) 上恒成立，依定义 4.1，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在 (a, b) 上线性相关.

(2) 对于两个函数 y_1, y_2 它们在区间 (a, b) 上线性无关相当于比式 $\frac{y_1}{y_2}$ 在 (a,b) 上不恒等于常数.

证明（反证法）. 如果有

$$\frac{y_1}{y_2}\equiv c \qquad (a<x<b),$$

其中 c 是某一常数.

上式相当于

$$y_1-cy_2\equiv 0 \qquad (a<x<b),$$

这显然与 y_1, y_2 在 (a, b) 上线性无关的假设矛盾.

例2. 函数 $y_1=e^x$，$y_2=e^{-x}$ 在任意区间上都是线性无关的.

实际上，比式

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^x}{e^{-x}}=e^x\neq \text{常数}$$

在任意区间上成立.

同样可以证明，$y_1=\cos x$，$y_2=\sin x$ 在任意区间上都是线性无关的.

例3. 函数 $y_1=\sin^2x$，$y_2=\cos^2x$，$y_3=1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性相关.

实际上，若取 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$，$\alpha_3=-1$，则有

$$1\cdot\sin^2x+1\cdot\cos^2x+(-1)\cdot 1\equiv 0 \qquad (-\infty<x<+\infty),$$

依定义4.1，已知函数组在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性相关.

下面我们来建立线性相关与线性无关的判别法则，为此先引入下面定义.

定义4.2. 设函数组 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中每一个 y_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 均有 $n-1$ 阶导数，则称行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

为已知函数组的**朗斯基**（*Wronski*）**行列式**（或简称**朗斯基**）．

函数组的朗斯基有如下性质：

定理 4.2．如果函数组 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在区间（a, b）上线性相关，则它的朗斯基在（a, b）上恒等于零．

证明 根据假设，存在不同时为零的 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\cdots+\alpha_n y_n \equiv 0, \qquad (a<x<b).$$

微分上述恒等式 $n-1$ 次，得到 n 个恒等式

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\cdots+\alpha_n y_n \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1'+\alpha_2 y_2'+\cdots+\alpha_n y' \equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}+\alpha_2 y_2^{(n-1)}+\cdots+\alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0. \end{cases}$$

上述方程组是关于α_i的齐次方程组，它的系数行列式恰是已知函数组的朗斯基，由假设知，对(a，b)的任一x，它均有非零解，因而，根据代数中的齐次方程组的性质，它的系数行列式对任一x皆等于零，即

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=0$$

在（a，b）上恒成立．证毕．

推论1． 如果函数组 y_1，y_2，，y_n 的朗斯基在区间（a, b）上某一点 x_0 处不等于零：$W(x_0)\neq 0$，则该函数组在（a, b）上线性无关．

实际上，如果线性相关，则依定理 4.2，必有 $W(x)\equiv 0$，这一矛盾证明了上述结论．

例4． 函数组 $e^{\lambda_1 x}$，$e^{\lambda_2 x}$，…，$e^{\lambda_n x}$， 其中当 $i\neq j$ 时，$\lambda_i\neq\lambda_j$， 在任意区间（a，b）上线性无关．

证明．已知函数组的朗斯基为

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_1 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$

$$=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

上述最后的行列式为著名的范德蒙（*Vandermond*）行列式，由代数知道，它等于 $\prod_{1<j<i<n}(\lambda_i-\lambda_j)$，由假设知$\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$，故此行列式不为零，从而$W(x)\neq 0$，由推论1，已知函数组在(a, b)上线性无关．证毕．

我们指出，由上述定理给出的条件$W(x)\equiv 0$只是函数组$y_1, y_2, \cdots, y_n$在某区间(a, b)上线性相关的必要条件，但它不是充分条件．这可由下例看出．

例5. 设有函数组

$$y_1=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad y_2=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$$

尽管

$$W(x)=\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 2x & 0\end{vmatrix}\equiv 0\quad (x\geqslant 0),$$

$$W(x)=\begin{vmatrix}0 & x^2\\ 0 & 2x\end{vmatrix}\equiv 0\quad (x<0),$$

即，对所有x，恒有$W(x)=0$，但y_1，y_2在$(-\infty, +\infty)$上是线性无关的．

为此只须证明，要使等式

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2=0$$

对$(-\infty, +\infty)$上的一切x成立，必须取$\alpha_1=\alpha_2=0$.实际上，若取$\alpha_1\neq 0$，对于$x\geqslant 0$，有

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2=\alpha_1 x^2+\alpha_2 0=\alpha_1 x^2,$$

它显然不能在$(0, +\infty)$上，从而不能在$(-\infty, +\infty)$上恒等于零．同样，对$\alpha_2\neq 0$也可以得到类似结论．

我们指出，如果函数组$y_1, y_2, \cdots y_n$是(4.13)定义在(a, b)上的n个解，这时它的朗斯基在(a, b)上恒等于零将成为该解组在(a, b)上线性相关的充分条件．这可由下述定理推出．

定理4.3 如果$y_1, y_2, \cdots, y_n$是方程(4.13)定义在(a, b)上的n个线性无关解，则它的朗斯基

$$W(x)\neq 0$$

在(a, b)上恒成立．

证明（反证法）．设$W(x_0)=0$ $(a<x_0<b)$．首先，作方程组

$$\begin{cases}c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\cdots+c_ny_n(x_0)=0,\\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+\cdots+c_ny_n'(x_0)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_ny_n^{n-1}(x_0)=0.\end{cases}$$

由于上述方程组系数行列式$W(x_0)=0$，故它有非零解：

$c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \cdots, c_n^{(0)}$ （$c_i^{(0)}$不全为零）．

构造解$y_1, y_2, \cdots, y_n$的线性组合

$$y=c_1^{(0)}y+c_2^{(0)}y_2+\cdots+c_n^{(0)}y_n.$$

根据方程（4.13）解的性质（2）它是（4.13）的解．又由于

$$y(x_0)=c_1^{(0)}y_1(x_0)+c_2^{(0)}y_2(x_0)+\cdots+c_n^{(0)}y_n(x_0)=0,$$

$$y'(x_0)=c_1^{(0)}y_1'(x_0)+c_2^{(0)}y_2'(x_0)+\cdots+c_n^{(0)}y_n'(x_0)=0,$$

$$\cdots\cdots$$

$y^{(n-1)}(x_0)=c_1^{(0)}y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2^{(0)}y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_n^{(0)}y_n^{(n-1)}(x_0)=0$，这表明，已知解满足初始条件：

$$x=x_0;\ y=0,\ y'=0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}=0.$$

但方程（4.13）的解 $y(x)\equiv 0$ 也满足上述初始条件，故，由解的唯一性，立刻可得

$$y(x)=c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\cdots+c_n^{(0)}y_n\equiv 0 \qquad (a<x<b).$$

由于 $c_1^{(0)}$，$c_2^{(0)}$，…，$c_n^{(0)}$ 不全为零，这显然与已知解组在 $(a,\ b)$ 上线性无关相矛盾．证毕．

由定理 4.3 立刻有如下推论．

推论2. 设 y_1，y_2，…y_n 是方程（4.13）定义在 $(a,\ b)$ 上的 n 个解，如果存在 $x_0\in(a,b)$，使得它的朗斯基

$$W(x_0)=0,$$

则该解组在 $(a,\ b)$ 上线性相关．

证明. 实际上，如果不然，由 y_1，y_2，…y_n 在 $(a,\ b)$ 上线性无关的假定，依定理 4.3 可推出，在 $(a,\ b)$ 上恒有

$$W(x)\neq 0.$$

这一矛盾证明了该解组在 $(a,\ b)$ 上线性相关．

推论3. 方程（4.13）的 n 个解 y_1，y_2，…，y_n 在其定义区间 $(a,\ b)$ 上线性无关的充要条件是，在 $(a,\ b)$ 上存在点 x_0，使得它的朗斯基 $W(x_0)\neq 0$．

充分性．如果 $W(x_0)\neq 0$，则 y_1，y_2，…，y_n 在 $(a,\ b)$ 上线性无关．

实际上，如若不然，设 y_1，y_2，…，y_n 在 $(a,\ b)$ 上线性相关，则依定理 4.2，在 $(a,\ b)$ 上必有 $W(x)\equiv 0$，这一矛盾证明了充分性的结论．

必要性．如果 y_1，y_2，…，y_n 在 $(a,\ b)$ 上线性无关，则在 $(a,\ b)$ 上存在点 x_0，使得

$$W(x_0)\neq 0.$$

实际上，如若不然，在 $(a,\ b)$ 上恒有 $W(x)=0$，则 y_1，y_2，…，y_n 在 (a,b) 上线性相关，矛盾．证毕．

顺便指出，由上述讨论可立刻推出，方程（4.13）的 n 个解 y_1，y_2，…，y_n 的朗斯基在其定义区间上或恒为零或恒不为零（即，若在某一点处等于零，则必在整个区间上等于零；若在某一点处不为零，则必在整个区间上恒不为零）．

由上述推论还可以得到，如果（4.13）的 n 个解在 $(a,\ b)$ 上线性无关，则它们在 $(a,\ b)$ 的任意子区间上也线性无关．这是显而易见的．

定义 4.3 方程（4.13）的定义在 $(a,\ b)$ 上的 n 个线性无关解称为（4.13）的**基本解组**．

例6. 例 1 曾指出 $y_1=\cos x$，$y_2=\sin x$ 是方程 $y''+y=0$ 的两个解．由于

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1\neq 0$$

在$(-\infty, +\infty)$上恒成立，该二函数是已知方程在$(-\infty, +\infty)$上的二线性无关的解，因而是已知方程的基本解组．不难看出，对于任意的非零的常数k，函数组

$$y_1=k\cos x,\quad y_2=k\sin x$$

均是已知方程的基本解组．

有了基本解组概念，进而就可以弄清楚线性方程的通解的结构了．

定理4.4（基本定理）如果$y_1, y_2, \cdots, y_n$是方程（4.13）的基本解组，则

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n \tag{4.16}$$

是（4.13）的通解，其中，$c_1, c_2, \cdots, c_n$是任意常数．

证明．首先，根据方程（4.13）解的性质（2），（4.16）是（4.13）的解．

其次，我们可以证明，适当地选择$c_1, c_2, \cdots, c_n$，可使（4.16）成为（4.13）的任意解．

设$y(x)$是（4.13）的一个任意解，并且满足条件：

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

作方程组

$$\begin{aligned}
y_0&=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\cdots+c_ny_n(x_0),\\
y'_0&=c_1y'_1(x_0)+c_2y'_2(x_0)+\cdots+c_ny'_n(x_0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_0^{(n-1)}&=c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0).
\end{aligned}$$

由于它的系数行列式是方程（4.13）的基本解组的朗斯基在$x=x_0$的值，故它不为零．因而，上述方程组关于$c_1, c_2, \cdots, c_n$可解．令其解为$c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \cdots, c_n^{(0)}$，用$c_i^{(0)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$代替（4.16）式中的$c_i(i=1,2,,\cdots,n)$，得到

$$\bar{y}=c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\cdots+c_n^{(0)}y_n. \tag{4.16$'$}$$

我们来证明$\bar{y}=y(x)$．实际上，首先因为它是（4.13）的解，其次，由于

$$\begin{aligned}
y_0&=c_1^{(0)}y_1(x_0)+c_2^{(0)}y_2(x_0)+\cdots+c_n^{(0)}y_n(x_0),\\
y'_0&=c_1^{(0)}y'_1(x_0)+c_2^{(0)}y'_2(x_0)+\cdots+c_n^{(0)}y'_n(x_0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_0^{(n-1)}&=c_1^{(0)}y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2^{(0)}y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_n^{(0)}y_n^{(n-1)}(x_0),
\end{aligned}$$

表明（4.16）$'$满足初始条件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \cdots,\ y_0^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

因而，根据唯一性定理，$\bar{y}\equiv y(x)$，即

$$y(x)\equiv c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\cdots+c_n^{(0)}y_n.$$

证毕．

上述定理表明，方程（4.13）的任一特解均可表为它的n个线性无关的特解的线性组合．

例7 已知方程

$$y''-y=0.$$

容易验证，函数$y_1=e^x$，$y_2=e^{-x}$是上述方程定义在$(-\infty, +\infty)$上的二线性无关的解，因而

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

是它的通解，其中c_1，c_2是任意常数.

根据基本定理，不难得到如下

推论4 n阶齐次方程（4.13）的线性无关解的个数不超过n个.

证明 设y_1，y_2，…，y_n，y_{n+1}是（4.13）的任意$n+1$个解，如果，它前n个解是线性相关的，则上述$n+1$个必线性相关．实际上，这时有

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n\equiv 0, \quad a<x<b,$$

其中，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$不全为零．在上式左端加一项$0\cdot y_{n+1}$，则恒等式

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n+0\cdot y_{n+1}\equiv 0, \qquad a<x<b,$$

仍成立．由于α_i不全为零，故y_1，y_2，…，y_n，y_{n+1}在(a, b)上线性相关.

如果y_1，y_2，…，y_n线性无关，则依基本定理，y_{n+1}可表为y_1，y_2，…，y_n的线性组合：

$$y_{n+1}\equiv c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\cdots+c_n^{(0)}y_n,$$

或

$$c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\cdots+c_n^{(0)}y_n-y_{n+1}\equiv 0, \qquad a<x<b,$$

这表明存在一组不全为零的常数$c_1^{(0)}$，$c_2^{(0)}$，…，$c_n^{(0)}$，-1而使上式在(a, b)上恒成立，因而，解y_1，y_2，…，y_n，y_{n+1}线性相关．证毕.

定理4.5 方程（4.13）总存在定义在(a, b)（系数的连续区间）上的基本解组.

证明 在(a, b)上任取点$x=x_0$，根据解存在与唯一性定理，在(a, b)上必存在n个分别满足下列初始条件：

$x=x_0$ 时，

$$y_1=1, \quad y_1'=0, \quad y_1''=0, \cdots\cdots, \quad y_1^{(n-1)}=0;$$

$$y_2=0, \quad y_2'=1, \quad y_2''=0, \cdots\cdots, \quad y_2^{(n-1)}=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=0, \quad y_n'=0, \quad y_n''=0, \cdots\cdots, \quad y_n^{(n-1)}=1;$$

的解y_1，y_2，……y_n.

由于这n个解在$x=x_0$点的朗斯基行列式的值

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

因而，$y_1, y_2, \cdots\cdots$，y_n是方程（4,13）定义在(a, b)上的基本解组.

我们都知道，代数方程的根与它的系数之间存在一定关系，例如著名的维达定理，与此类似，齐次方程（4,13）的解与它的系数之间具有如下关系.

定理4.6 设$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \tag{4.13}$$

的任意n个解，$W(x)$是它的朗斯基，则对(a,b)上的任一$x=x_0$，皆有

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(t)dt} \tag{4.17}$$

上述关系式就是著名的刘维尔（*Liouville*）公式.

证明. 由于

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots\cdots y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots\cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

微分上述行列式*)，得：

$$\frac{dW(x)}{dx}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\cdots\cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2\cdots\cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)}\cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)}\cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

依次用$p_n(x)$，$p_{n-1}(x)$，…，$p_2(x)$乘上述行列式的前$n-1$行元素，再将它们分别加到最后一行上去，这时，行列式最后一行的元素是：

$y_k^{(n)}+p_2(x)y_k^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'_k+p_n(x)y_k$，$(k=1, 2, \cdots, n)$. 由于$y_1$, y_2, $\cdots y_n$均是方程（4.13）的解，故可得

$$y_k^{(n)}+p_2(x)y_k^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'_k+p_n(x)y_k\equiv-p_1(x)y_k^{(n-1)},$$

$$(k=1, 2, \cdots, n).$$

再分别用上式右端$-p_1(x)y_k^{(n-1)}$去代替$y_k^{(n)}+p_2(x)y_k^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'_k+$ $+p_n(x)y_k$，最后可得

$$\frac{dW(x)}{dx}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1(x)y_1^{(n-1)} & -p_1(x)y_2^{(n-1)} & \cdots & -p_1(x)y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=-p_1(x)W(x)$$

或

$$\frac{dW(x)}{dx}+p_1(x)W(x)\equiv0.$$

从而

$$\frac{d}{dx}\left[W(x)e^{\int_{x_0}^{x}p_1(x)dx}\right]\equiv0,$$

所以

$$e^{\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx} \cdot W(x) \equiv W(x_0).$$

由此推出刘维尔公式：

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}.$$

---

*) 下面介绍行列式微分法则．设有行列式

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\varDelta$ 可视为 n^2 个变量 $a_{ik}(i,k=1,2,\cdots,n)$ 的函数．假设每一个 a_{ik} 均是变量 t 的函数，并且存在对 t 的导数，$\frac{da_{ik}}{dt}$．这时，$\varDelta$ 便是以 a_{ik} 为中间变量，t 为自变量的复合函数．因而，为求出$\frac{d\varDelta}{dt}$要使用求复合函数的导数的链式法则，这需要计算偏导数$\frac{\partial\varDelta}{\partial a_{ik}}$．为此，先将△按第 i 行元素展开，得

$$\varDelta=A_{i1}a_{i1}+A_{i2}a_{i2}+\cdots+A_{in}a_{in},$$

其中 $A_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$是元素 $a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$的代数余子式．不难看到，它不包含有元素 a_{ik}，因而

$$\frac{\partial\varDelta}{\partial a_{ik}}=A_{ik}.$$

根据求多元函数复合函数导数的链式法则，有

$$\frac{d\varDelta}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a_{ik}}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(A_{ik}\frac{da_{ik}}{dt}\right)$$

我们指出，$\sum_{k=1}^{n}\left(A_{ik}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}\right)$是一个 n 阶行列式的展开式，它和原行列式的区别仅仅是，第 i 行元素是已知行列式第 i 行元素的导数．如此，可得行列式的微分法则：行列式 $\varDelta$ 的导数，等于 n 个行列式的和，这 n 个行列式可由 $\varDelta$ 依次将第一行，第二行……第 n 行的元素分别用它的导数代换后得到．

将上述法则用于方程（4.11）n 个解 y_1．y_2，…，y_n 的朗斯基的导数，可得

$$\frac{dW}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=$$

$$
\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.
$$

不难发现，对于上述n个行列式中的前$n-1$个行列式的每一个行列式中，均有两行全同的元素，因而，依行列式性质，它们均等于零，故最后可得

$$
\frac{dW(x)}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}
$$

顺便指出，由公式（4.17）可以看出，若$W(x_0)=0$，则$W(x)$在(a, b)上恒为零；如果$W(x_0)\neq 0$，则$W(x)$在(a, b)上恒不为零．换句话说，利用刘维尔公式，同样可推出，齐次方程（4.13）的解的朗斯基的两条重要性质：

（1）方程（4.13）的解的朗斯基$W(x)$如在(a, b)上某一点处为零，则在整个(a, b)上恒等于零；

（2）方程（4.13）的解的朗斯基$W(x)$在(a, b)上某一点处不等于零，则在整个(a, b)上恒不为零．

下面给出刘维尔公式的一个简单应用：对二阶线性齐次方程

$$
y''+p(x)y'+q(x)y=0,
$$

如果已知它的一个非零特解y_1，依刘维尔公式用积分的方法可求出与y_1线性无关的另一个特解，从而可求出它的通解．

设y是已知二阶齐次方程不同于y_1的任一解，根据公式（4.17），则有

$$
\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = ce^{-\int p(x)dx}
$$

或

$$
y_1y'-yy_1'=ce^{-\int p(x)dx}.
$$

为了积分上述一阶线性方程，用$\frac{1}{y_1^2}$乘上式的两端，整理后可得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{c}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx},$$

由此可得

$$\frac{y}{y_1}=\int\frac{ce^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx+c^*.$$

易见，$y=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$ 是已知方程的另一个解，即 $c^*=0$，$c=1$ 所对应的解．此外，由于比式

$$\frac{y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx}{y_1}=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

在任一区间上均不恒等于常数，所以它是已知方程的与 y_1 线性无关的解．从而，可得已知方程的通解

$$y=c^*y_1+cy_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)yx}dx.\qquad(!.18)$$

其中，c^*，c 是任意常数．

例9． 解方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0.$$

容易看出，已知方程有特解 $y_1=x$．在此 $p(x)=-\frac{2x}{1-x^2}$，根据公式(4.18)，立刻可得通解

$$y=x\left[c^*+c\int\frac{1}{y_1^2}e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}dx\right]=x\left[c^*+c\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}\right]$$

$$=x\left[c^*+c\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\right)dx\right]$$

$$=c^*x+cx\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}\right)=c^*x+c\left(\frac{x}{2}ln\frac{1+x}{1-x}-1\right).$$

上述例子表明，如果能用某种方法，例如观察法，求得二阶线性齐次方程的一个特解，就可以利用刘维尔公式来求其通解．

习　　题 4.1

1．试讨论下列各函数组

1）$\sin 2t$，$\cos t$，$\sin t$；

2）x，$\operatorname{tg} x$；

3）x^2-x+3，$2x^2+x$，$2x+4$；

4）e^t，te^t，t^2e^t，

在它们的定义区间上是线性相关的，还是线性无关的？

2. 设在方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 中，$p(x)$ 在某区间 I 上连续且恒不为零，试证它的任意两个线性无关的解的朗斯基是区间 I 上严格单调函数.

3. 试证明，二阶线性齐次方程的任意两个线性无关的解组的朗斯基之比是一个不为零的常数.

4. 已知方程 $(x-y)y''-xy'+y=0$ 的一个解 $y_1=x$，试求其通解.

5. 已知方程 $(1-\ln x)y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$ 的一个解 $y_1=\ln x$，求其通解.

6. 在方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 中，当系数满足什么条件时，其基本解组的朗斯基等于常数.

7. 设 $y_1(x)$ 是 n 阶线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的一个非零解，试证明，利用线性变换 $y=y_1(x)z$ 可将已知方程化为 $n-1$ 阶的齐次方程.

8. 求方程 $x^3y'''-3x^2y''-6xy'-6y=0$ 的通解，已知它的两个特解 $y_1=x$，$y_2=x^2$.

§4.3 n 阶线性非齐次方程

在讲一阶线性非齐次方程时，我们得到一个重要结论：一阶线性非齐次方程的通解等于它的对应齐次方程的通解与它本身的某个特解之和. 对于 n 阶线性非齐次方程，这个结论也成立.

定理 4.7 n 阶线性非齐次方程

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \tag{4.11}$$

的通解等于它的对应齐次方程

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \tag{4.13}$$

的通解与它本身的某一个特解之和.

证明. 设 y_1 是 (4.11) 的某一特解，y 是 (4.13) 的通解. 首先，我们来证明，y_1+y 是 (4.11) 的解. 实际上，由于

$$L[y_1+y]=L[y_1]+L[y],$$

以及

$$L[y_1]\equiv f(x),\ L[y]\equiv 0,$$

故有

$$L[y_1+y]\equiv f(x).$$

上式表明 y_1+y 是 (4.11) 的解.

其次我们来证明，对于 (4.11) 的任一特解 $\widetilde{y}$，有 $\widetilde{y}=y_1+\widetilde{y}$，其中 $\widetilde{y}$ 是 (4.13) 的某个特解，这也就相当于去证明，$\widetilde{y}-y_1$ 是 (4.13) 的一个解. 实际上，

$$L[\widetilde{y}-y_1]=L[\widetilde{y}+(-y_1)]=L[\widetilde{y}]+L[-y_1]=L[\widetilde{y}]-L[y_1].$$

由于假设

$$L[\tilde{y}]\equiv f(x),\ L[y_1]\equiv f(x),$$

故有

$$L[\tilde{y}-y_1]\equiv f(x)-f(x)\equiv 0.$$

上述结论表明，（4.11）的任一解$\tilde{y}$均可表为（4.11）的某一解y_1与(4.13)的某一个解$\tilde{y}$之和．换句话说，（4.11）的任一解均包含在（4.11）的特解y_1与（4.13）通解的和y_1+y之中．根据定理证明的前半部，y_1+y中的每一个函数均是（4.11）的解，故本定理结论成立．证毕．

根据上述定理．可得如下的常用的结论：如果y_1，y_2，…，y_n是(4.13)的n个线性无关的解，c_1，c_2，…，c_n是n个任意常数，$\bar{y}$是（4.11）的某一个解，则（4.13）的通解为

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n,$$

从而

$$Y(x)=\bar{y}+c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$$

就是（4.11）的通解．

由此可见，求(4.11)的通解问题，便归结为求（4.11）的一个特解和（4.13）的n个线性无关的解的问题了．

和一阶线性方程类似，n阶线性非齐次方程也有根据对应齐次方程n个线性无关的解来求它本身的一个特解的方法——常数变易法（拉格朗日法）．下面就来介绍这一方法．

设y_1，y_2，…，y_n是（4.13）的n个线性无关的解，则函数

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$$

是（4.13）的通解，其中c_1，c_2，…，c_n是任意常数．

我们来选择一组函数$c_1(x)$，$c_2(x)$，…，$c_n(x)$，使

$$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2(x)+\cdots+c_n(x)y_n \tag{4.19}$$

成为非齐次方程（4.11）的解．

为此，首先形式地假定（4.19）是(4.11)的解，然后再去找$c_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$所应满足的条件．

把（4.19）代入（4.11）中，仅能得一个使（4.19）是（4.11）的解时$c_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$所应满足的条件．由于这里需要确定n个函数，所以，为了确定出它们，还必须再给出关于$c_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$所应满足的另外的$n-1$个条件．为了使确定$c_i(x)$的条件简单，我们在计算（4.19）关于x的直到$n-1$阶导数的表达式中，令所有的含有$c'_i(x)$的项之和等于零．如此得到

$$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+\cdots+c_ny_n$$

$$y'=c_1(x)y'_1+c_2(x)y'_2+\cdots+c_n(x)y'_n+c'_1(x)y_1+c'_2(x)y_2+\cdots+c'_n(x)y_n$$

$$(令\ c'_1(x)y_1+c'_2(x)y_2+\cdots+c'_n(x)y_n=0)$$

$$y''=c_1(x)y''_1+c_2(x)y''_2+\cdots+c_n(x)y''_n+$$

$$+c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'+\cdots+c_n'(x)y_n'$$
$$(\text{令 } c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'+\cdots+c_n'(x)y_n'=0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)}=c_1(x)y_1^{(n-1)}+c_2(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_ny_n^{(n-1)}+$$
$$+c_1'(x)y_1^{(n-2)}+c_2'(x)y_2^{(n-2)}+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-2)}$$
$$(\text{令 } c_1'(x)y_1^{(n-2)}+c_2'(x)y_2^{(n-2)}+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-2)}=0),$$
$$y^{(n)}=c_1(x)y_1^{(n)}+c_2(x)y_2^{(n)}+\cdots+c_n(x)y_n^{(n)}+$$
$$+c_1'(x)y_1^{(n-1)}+c_2'(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}.$$

再分别用$p_n(x)$，$p_{n-1}(x)$，…，$p_1(x)$，1依次乘以上各式，相加后可得

$$c_1(x)L[y_1]+c_2L[y_2]+\cdots+c_n(x)L[y_n]+$$
$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}+c_2'(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x),$$

由于$L[y_i]\equiv 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，最后可得$c_1(x)$，$c_2(x)$，…，$c_n(x)$所应满足的n个条件，即n个方程

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2+\cdots+c_n'(x)y_n=0, \\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'+\cdots+c_n'(x)y_n'=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}+c_2'(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases}$$

它是关于变量$c_i'(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的线性代数方程组，由于它的系数行列式恰是方程（4.11）的n个线性无关解的朗斯基，故它恒不为零，因而，上述方程组关于$c_i'(x)$可解．解出后积分，并代入（4.19）中，便可得到（4.11）的一个解．

例1 求

$$y''+y=\frac{1}{\cos x}$$

的通解．

解 由§4.2 例6知，$y_1=\cos x$，$y_2=\sin x$是对应齐次方程的线性无关的解，故它的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

现在求已知方程形如

$$y_1=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$$

的一个特解．由于

$$y_1'=c_1'(x)\cos x-c_1(x)\sin x+c_2'(x)\sin x+c_2(x)\cos x,$$

令

$$c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0,$$

得

$$y_1'=-c_1(x)\sin x+c_2(x)\cos x.$$

这时，

$$y_1''=-c_1'(x)\sin x-c_1(x)\cos x+c_2'(x)\cos x-c_2(x)\sin x,$$

将上式代入原方程，得



$$y_1''+y_1=-c_1'(x)\sin x-c_1(x)\cos x+c_2'(x)\cos x-c_2(x)\sin x+$$

$$+c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x=\frac{1}{\cos x}.$$

由此可得方程组：

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0, \\ -c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

解上述方程组．得

$$c_1'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad c_1(x)=\ln|\cos x|+\tilde{c}_1;$$

$$c_2'(x)=1, \qquad c_2(x)=x+\tilde{c}_2.$$

故已知方程的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x.$$

例 2 求方程 $\ddot{x}+\omega_0^2x=f(t)$ 的通解．

解 对应齐次方程的通解为

$$x=c_1\cos\omega_0t+c_2\sin\omega_0t.$$

现在求已知非齐次方程形如

$$x=c_1(t)\cos\omega_0t+c_2(t)\sin\omega_0t$$

的特解．

由此可得方程组

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos\omega_0t+c_2'(t)\sin\omega_0t=0, \\ -\omega_0c_1'(t)\sin\omega_0t+\omega_0c_2'(t)\cos\omega_0t=f(t). \end{cases}$$

从而

$$c_1'(t)=-\frac{1}{\omega_0}f(t)\sin\omega_0t,$$

$$c_1(t)=-\frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(u)\sin\omega_0u\,du+\tilde{c}_1,$$

$$c_2'(t)=\frac{1}{\omega_0}f(t)\cos\omega_0t,$$

$$c_2(t)=\frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(u)\cos\omega_0u\,du+\tilde{c}_2.$$

故已知方程通解为

$$X(t)=c_1\cos\omega_0t+c_2\sin\omega_0t-\frac{\cos\omega_0t}{\omega_0}\int_0^t f(u)\sin\omega_0ud+u$$

$$+\frac{\sin\omega_0t}{\omega_0}\int_0^t f(u)\cos\omega_0u\,du.$$

或

$$X(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(u)[\cos\omega_0 u\sin\omega_0 t-$$
$$-\sin\omega_0 u\cos\omega_0 t]du,$$

从而

$$X(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(u)\sin\omega_0(t-u)du.$$

习　　题 4.2

1．设$p(x)$，$q(x)$，$f(x)$在$[0,1]$上连续，试证明，方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$满足条件$y(0)=y(1)=0$的解唯一的充要条件是：方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$只有零解满足条件：$\bar{y}(0)=\bar{y}(1)=0$.

2．用常数变易法求方程

$$y''-y=\frac{2e^x}{e^x-1}$$

的通解．

3．在方程$y''+3y'+2y=f(x)$中，$f(x)$在$[a,\ +\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，试证明，已知方程的任一解$y(x)$均有：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

§4.4　n阶常系数线性齐次方程解法

从上节已经知道，为求出非齐次方程（4.11）的通解，只要求出其对应齐次方程（4.13）的通解就可以了．至于如何求出齐次方程（4.13）的通解，上面并没有回答这一问题．为求齐次方程（4.13）的通解，根据齐次方程通解的构造，只须求出它的n个线性无关的解，即基本解组就可以．虽然根据上面证明过的定理，它的基本解组一定存在，甚至有无穷多个．但在一般情况下，并非总能具体求出它来．可是，当齐次方程的系数$p_i(x)$均是实常数时，它的基本解组却总可用代数方法求出，换句话说，对于常系数齐次方程，从而对于常系数的非齐次方程，总可以求出它的通解．

形如

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)\tag{4.20}$$

的方程，其中$a_i(i=1,2,\cdots,n)$均为**实常数**，称为**n阶常系数线性方程**．如果$f(x)\equiv0$，即

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+c_ny=0\tag{4.21}$$

称为**n阶常系数线性齐次方程**．与此相应，（4.20）称为n阶常系数非齐次方程．为叙述简便，有时也称（4.21）为（4.20）的对应齐次方程．

常系数线性方程，特别是二阶常系数线性方程在工程技术中有广泛的应用，这在本章开始时就已提到了，并准备在§4.6做进一步介绍．

本节主要介绍n阶常系数线性齐次方程的解法，为此，先来研究简单的一阶方程

$$y'+ay=0,\tag{4.22}$$

其中 a 是常数. 由上述方程结构，容易看出它有特解

$$y=e^{-ax}.$$

比较（4.21）与（4.22）. 它们均是常系数线性齐次方程. 因而，可以猜想方程（4.21）有形如

$$y=e^{\lambda x} \tag{4.23}$$

的解，其中 λ 是待定常数. 为了确定出使（4.23）是（4.21）的解的 λ，先形式上将（4.23）看作是（4.21）的解，并将它代（4.21）之中，再确定使（4.23）是（4.21）解时 λ 所应满足的条件. 实际上

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda x}]&=(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)e^{\lambda x}\\ &=p(\lambda)e^{\lambda x}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

其中

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

称为**特征多项式**. 由(4.24)可以看出，函数（4.23）是方程（4.21）的解的充要条件是

$$p(\lambda)=0, \tag{4.25}$$

即 λ 应是方程（4.25）的根.

方程（4.25）称为（4.21）的**特征方程**，（4.25）的根称为（4.21）的**特征根**. 换句话说，当且仅当 λ 是（4.21）的特征根时，（4.23）才是（4.21）的解. 这样，求（4.21）的解的问题，便归结为求（4.21）的特征根的问题了.

下面分两种情况讨论.

1° 特征根互异情形

首先，假设（4.25）有 n 个互异的实根 λ_1，λ_2，…，λ_n. 这时，依上述讨论，方程（4.21）有 n 个特解

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=e^{\lambda_2 x},\cdots,\ y_n=e^{\lambda_n x}. \tag{4.26}$$

在§4.2 中已经证明了函数组（4.26）在（$-\infty$，$+\infty$）上线性无关，故它是方程（4.21）的基本解组. 所以，函数

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2}+\cdots\cdots+c_ne^{\lambda_n x}$$

是方程（4.21）的通解，其中 c_1，c_2，…，c_n 是任意常数.

例 1 求方程

$$y''-5y'+6y=0$$

的通解及满足初始条件：$x=0$ 时，$y=1$，$y'=2$ 的特解.

解 特征方程为

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

或

$$\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$

从而，特征根为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$. 因之，通解为

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x},$$

其中 c_1，c_2 为任意常数.

其次求特解. 将初始条件代入方程组

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x},$$
$$y'=2c_1e^{2x}+3c_2e^{3x},$$

得

$$1=c_1+c_2,\ 2=2c_1+3c_2.$$

由此解得　$c_2=0$，$c_1=1$．因而所求特解为

$$y=e^{2x}.$$

例 2　求方程

$$y''-5y'=0$$

的通解．

解　特征方程为

$$\lambda^2-5\lambda=0,\ \lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)=0,$$

特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=5$，故所求通解为

$$y=c_1+c_2e^{5x}.$$

下面讨论在 λ_1，λ_2，…，λ_n 中有复根的情形．

为此，先给出实变量的复值函数和复解的概念．

函数

$$y(x)=u(x)+iv(x)$$

称为实变量的复值函数，其中 $u(x)$，$v(x)$都是实变量 x 的实函数，而 $i=\sqrt{-1}$．函数 $u(x)$，$v(x)$ 分别称为复函数的实部及虚部．

例如，e^{ix} 即为实变量复函数．根据欧拉（*Euler*）公式，有

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

$\cos x$，$\sin x$ 分别是 e^{ix} 的实部及虚部．再如，$e^{\alpha x}$ 也是一实变量复值函数，其中 $\alpha=a+ib$，a，b 均是实数．实际上

$$e^{\alpha x}=e^{(a+ib)x}=e^{ax}\cdot e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$$
$$=e^{ax}\cos bx+ie^{ax}\sin bx.$$

$e^{ax}\cos bx$，$e^{ax}\sin bx$ 分别是 $e^{\alpha x}$ 的实部及虚部．

在下面讨论中要用到实变量复函数对自变量的 n 阶导数的概念，现定义如下：

定义 4.4

$$y^{(n)}(x)=u^{(n)}(x)+iv^{(n)}(x). \tag{4.27}$$

下面举两个求实变量复值函数导数的例子．

1．无论 α 是实数还是复数，总有

$$(e^{\alpha x})'=\alpha e^{\alpha x}$$

α 为实数时，上述等式是已知的．现假设 $\alpha=a+ib$，a 及 b 均是实数．由于

$$e^{\alpha x}=e^{ax}\cos bx+ie^{ax}\sin bx.$$

根据（4.27）式，有

$$(e^{\alpha x})'=[e^{ax}\cos bx+ie^{ax}\sin bx]'$$
$$=[e^{ax}\cos bx]'+i[e^{ax}\sin bx]'$$
$$=(ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx)+$$

$$+i(ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx)$$
$$=e^{ax}[a(\cos bx+i\sin bx)+i(\cos bx+i\sin bx)b]$$
$$=(a+ib)e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)=\alpha e^{\alpha x}.$$

2. 对任意实数 k 与任意实数或复数 α 均有

$$(x^k e^{\alpha x})'=(kx^{k-1}+\alpha x^k)e^{\alpha x}, \tag{4.28}$$

当 α 是实数时（4.28）式显然成立.

现在设 $\alpha=a+ib$，这时

$$x^k e^{\alpha x}=x^k e^{ax}\cos bx+ix^k e^{ax}\sin bx.$$

因而，

$$(x^k e^{\alpha x})'=(x^k e^{ax}\cos bx)'+i(x^k e^{ax}\sin bx)'$$
$$=kx^{k-1}e^{ax}\cos bx+x^k a e^{ax}\cos x-x^k e^{ax}b\sin bx+$$
$$+i(kx^{k-1}e^{ax}\sin bx+x^k a e^{ax}\sin bx+x^k e^{ax}b\cos bx)$$
$$=kx^{k-1}e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+x^k e^{ax}\cos bx(a+ib)+$$
$$+ix^k e^{ax}\sin bx(a+ib)$$
$$=kx^{k-1}e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+x^k e^{ax}(a+ib)(\cos bx+i\sin bx)$$
$$=kx^{k-1}e^{\alpha x}+\alpha x^k e^{\alpha x}=(kx^{k-1}+\alpha x^k)e^{\alpha x}.$$

下面给出方程（4.21）复解的概念.

设有实变量的复值函数

$$y(x)=u(x)+iv(x). \tag{4.29}$$

如果有

$$L[u(x)+iv(x)]\equiv 0,$$

则称（4.29）为方程（4.21）的复解.

我们可以证明，方程（4.21）的任一复解都产生(4.21)的二实解，即：如果(4.29)是（4.21）的复解，则（4.29）的实部 $u(x)$ 和虚部 $v(x)$（它们都是实函数）都是（4.21）的解.

实际上，如果（4.29）是（4.21）的解，则

$$L[u(x)+iv(x)]\equiv L[u(x)]+iL[v(x)]\equiv 0,$$

一个复函数恒等于零相当于它的实部及虚部分别恒等于零，故有

$$L[u(x)]\equiv 0,\quad L[v(x)]\equiv 0,$$

这表明，$u(x)$，$v(x)$都是（4.21）的解.

例如，不难看出，方程

$$y''+y=0$$

有复解

$$y(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

从而，它的实部 $\cos x$ 及虚部 $\sin x$ 都是原方程的解.

有了实变量的复值函数和它的导数定义 4.4 以及（4.21）的复解概念之后，(4.23)中的 λ 也可以是复数，而且自（4.23）以后的运算，不管 λ 是实数还是复数都是对的. 特别是，当方程（4.21）有 n 个互异的根（可以是复数）时，方程（4.21）也有形如

(4.26) 的n个解. 这时，同样可以证明，既使在λ_1，λ_2，…，λ_n中有复数，函数组 (4.26) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上还是线性无关的. 因而仍然构成方程 (4.21) 的基本解组.

尽管如此，通常我们还是希望设法求出方程 (4.21) 的n个实的线性无关的特解.

首先指出，由于方程 (4.21) 的系数都是实数，因此它的特征多项式 (4.25) 是实系数多项式. 故它的复根（如果存在）必定共轭成对出现. 即，如果$a+ib$是特征根，它的共轭复数$a-ib$也必是特征根，于是，方程 (4.21) 的复解一定共轭成对地出现，即，这时有如下成对的复解：

$$e^{(a+ib)x},\ e^{(a-ib)x}, \tag{4.30}$$

将上述两个解换成如下的两个解

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[e^{(a+ib)x}+e^{(a-ib)x}]=e^{ax}\cos bx, \\ &\frac{1}{2i}[e^{(a+ib)x}-e^{(a-ib)x}]=e^{ax}\sin bx, \end{aligned} \tag{4.31}$$

即换成$e^{(a+ib)x}$的实部及虚部.

但是，在 (4.26)（如上面所说，其中λ_i可以是复数而且复数一定共轭成对地出现）中，成对的复解用上述成对的实解替换之后，是否仍是线性无关呢？回答是肯定的. 有如下定理.

定理 4.8 如果$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$是在区间(a, b)上的n个线性无关的函数，b_1，b_2是两个不等于零的常数，则函数组

$$b_1[y_1(x)+y_2(x)],\ b_2[y_1(x)-y_2(x)],\ y_3(x),\ \cdots,\ y_n(x) \tag{4.31}$$

在区间(a, b)上仍是线性无关的.

证明（反证法）. 如果 (4.31) 线性相关，那么依定义 4.1，存在n个不全为零的常数c_1，c_2，…，c_n，使得对区间(a, b)上的所有x皆有

$$c_1b_1[y_1(x)+y_2(x)]+c_2b_2[y_1(x)-y_2(x)]+c_3y_3(x) + \cdots\cdots + c_ny_n(x)\equiv 0.$$

所以，

$$(c_1b_1+c_2b_2)y_1(x)+(c_1b_1-c_2b_2)y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)\equiv 0.$$

因为$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$线性无关，从而

$$c_1b_1+c_2b_2=0,\ c_1b_1-c_2b_2=0,\ c_3=\cdots\cdots=c_n=0.$$

从上式可知$c_1b_1=c_2b_2=0$，因为b_1，$b_2\neq 0$，故$c_1=c_2=0$. 即所有常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$都必须等于零. 此为矛盾. 证毕.

同时，如果方程 (4.21) 有n个形如 (4.26) 的线性无关解，如上所述，其中复解一定共轭成对出现，我们逐对地将复解 (4.30) 换成实解 (4.31)，那么根据定理4.8最后可得 (4.21) 的n个线性无关的实解.

例 3 求方程

$$y'''-3y''+9y'+13y=0$$

的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=0.$$

由于

$$\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+13)=0,$$

由此可得，$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2+3i$，$\lambda_3=2-3i$，

因而，基本解组为

$$e^{-x},\ e^{2x}\cos 3x,\ e^{2x}\sin 3x;$$

通解为

$$y=c_1e^{-x}+e^{2x}[c_2\cos 3x+i\sin 3x].$$

例 4 求方程

$$y'''-y''+4y'-4y=0$$

的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0.$$

由于

$$\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=\lambda^2(\lambda-1)+4(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2+4),$$

故特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2i$，$\lambda_3=-2i$.

因而基本解组为

$$e^x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,$$

故所求通解为

$$y=c_1e^x+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x.$$

2° 特征根有重根情形

设λ_1是k重特征根（实的或复的）由上述讨论知，$e^{\lambda_1 x}$是（4.21）的一个解. 但这时由于互异的特征根的个数小于n，故相应地，形如（4.26）的线性无关的解的个数也小于n. 要得到通解，这些特解是不够的. 对应于λ_1，除解$e^{\lambda_1 x}$外还应补上哪些解呢？为弄清这一问题，先来研究二阶常系数方程

$$y''+py'+qy=0,$$

并设$p^2=4q$.

特征方程为

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{p}{2}.$$

易见，$\lambda_1=-\frac{p}{2}$为二重特征根，因而，首先，它应有特解

$$y_1=e^{-\frac{p}{2}x}.$$

现在求已知方程的和y_1线性无关的另一特解，由（4.18）式知，这一特解应为

$$y_1\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx = e^{-\frac{p}{2}x}\int \frac{e^{-px}}{e^{-px}}dx = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

即，当$\lambda_1=-\frac{p}{2}$是二重特征根时，已知二阶方程除有解 $y_1=e^{-\frac{p}{2}x}$外，还有与它线性无关的另一个特解 $y_2=xe^{-\frac{p}{2}x}$（即，y_1乘以x的一次幂）.

与二阶方程情况类似，可以证明，当λ_1是（4.21）的 k 重特征根时，它对应形如

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \cdots\cdots,\ x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$$

的k个特解．但由于证明比较繁，在此略去*）

综上所述，可得如下定理．

定理 4.9 如果方程（4.21）有两两互异的特征根λ_1，λ_2，…，λ_p，它们的重数分别为m_1，m_2，…，m_p，$m_i\geqslant 1$，且$m_1+m_2+\cdots\ m_p=n$，则它们对应特解是

$$\left.\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \cdots\cdots\cdots, & x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}; \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \cdots\cdots\cdots, & x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x}; \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ e^{\lambda_p x}, & xe^{\lambda_p x}, & \cdots\cdots\cdots, & x^{m_p-1}e^{\lambda_p x}; \end{array}\right\} \tag{4.32}$$

且（4.32）构成（4.21）在区间（$-\infty$，$+\infty$）上的基本解组．

证明 结论的第一部是正确的**）．下面来证明函数组（4.32）在（$-\infty$，$+\infty$）上线性无关．

使用反证法．设关系式

$$\begin{aligned} & \alpha_0^{(1)}e^{\lambda_1 x}+\alpha_1^{(1)}xe^{\lambda_1 x}+\cdots\cdots+\alpha_{m_1-1}^{(1)}x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}+ \\ & +\alpha_0^{(2)}e^{\lambda_2 x}+\alpha_1^{(2)}xe^{\lambda_2 x}+\cdots\cdots+\alpha_{m_2-1}^{(2)}x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x}+ \\ & +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+ \\ & +\alpha_0^{(p)}e^{\lambda_p x}+\alpha_1^{(p)}xe^{\lambda_p x}+\cdots\cdots+\alpha_{m_p-1}^{(p)}x^{m_p-1}e^{\lambda_p x}\equiv 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

在（$-\infty$，$+\infty$）上恒成立，且常数$\alpha_i^{(k)}$中至少有一个不等于零．

关系式（4.33）可改写成

$$\sum_{k=1}^{p}P_{m_k}(x)e^{\lambda_k x}\equiv 0 \tag{4.34}$$

其中

$$P_{m_k}(x)=\alpha_0^{(k)}+\alpha_1^{(k)}x+\cdots\cdots+\alpha_{m_k-1}x^{m_k-1}$$

是m_{k-1}次多项式，且$P_{m_k}(x)$（$k=1,2,\cdots,P$）中至少有一个在（$-\infty$，$+\infty$）上不恒为零．

---

*） 证明可参看．《微分方程教程》，$B.B$．史捷班诺夫著（卜元震译高等教育出版社．1955．8 第208—209页）．

**） 见前注．

不妨认为$P_{m_p}(x)\neq 0$（不恒为零）．用$e^{-\lambda_1 x}$乘（4.34）式两端，得

$$P_{m_1}(x)+\sum_{k=2}^{p} p_{m_k}(x)e^{(\lambda_k-\lambda_1)x}\equiv 0.$$

对上式关于x求m_1阶导数，得

$$\sum_{k=2}^{p} P_{m_k}^{(1)}(x)e^{(\lambda_k-\lambda_1)x}\equiv 0, \tag{4,34'}$$

并且$p_{m_k}^{(1)}(x)\not\equiv 0$．这是因为

$$[P_{m_k}(x)e^{(\lambda_k-\lambda_1)x}]^{(m_1)}=P_{m_k}^{(1)}(x)e^{(\lambda_k-\lambda_1)x},$$

故$P_{m_k}^{(1)}(x)$与$P_{m_k}(x)$是同次多项式．

用$e^{-(\lambda_2-\lambda_1)x}$乘（4.34'）式两端，得

$$P_{m_k}^{(1)}(x)+\sum_{k=3}^{p} P_{m_k}^{(1)}(x)e^{(\lambda_k-\lambda_2)x}\equiv 0.$$

求上式关于x的m_2阶导数．得

$$\sum_{k=3}^{p} P_{m_k}^{(2)}(x)e^{(\lambda_k-\lambda_2)x}\equiv 0,$$

并且$P_{m_k}^{(2)}(x)\not\equiv 0$．

如此继续下去，最后可得

$$P_{m_p}^{(p-1)}(x)e^{(\lambda_p-\lambda_{p-1})x}\equiv 0.$$

由假设知，$P_{m_p}(x)\not\equiv 0$，故$P_{m_p}^{(p-1)}(x)\not\equiv 0$，但在上述等式中，由于$e^{(\lambda_p-\lambda_{p-1})x}\neq 0$，从而有$P_{m_p}^{(p-1)}(x)\equiv 0$，此为矛盾．故函数组（4.32）在$(-\infty, +\infty)$上线性无关．因此，函数组（4.32）是方程（4.21）的基本解组．

最后，由定理4.9可得方程（4.21）的通解

$$y=\sum_{r=1}^{p} G_r(x)e^{\lambda_r x}, \tag{4.35}$$

其中$G_r(x)$是具任意系数的m_r-1次多项式，且在通解的表达式中，任意常数的个数

$$m_1+m_2+\cdots+m_p=n,$$

这恰等于方程的阶数．

若在（4.32）中出现复解，那么如同单根时一样，也可以换成实解．事实上，比如$\lambda_1=a+ib$是方程（4.21）的m_1重特征根，则共轭复数$a-ib$也是（4.21）的m_1重特征根．因此，此时（4.32）中含有如下的$2m_1$个解

$$e^{(a+ib)x},\ xe^{(a+ib)x},\ \cdots\cdots,\ x^{m_1-1}e^{(a+ib)x};$$

$$e^{(a-ib)x},\ xe^{(a-ib)x},\ \cdots\cdots,\ x^{m_1-1}e^{(a-ib)x}.$$

在这$2m_1$个复解中．把共轭成对的复解如同将（4.30）换成（4.31）那样，并且这样的步骤逐对地进行，根据定理4.8最后得到的函数组在$(-\infty, +\infty)$上仍然是线性无关的．因此，在函数组（4.32）中，当上述$2m_1$个复解换成如下的$2m_1$个实解

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \cdots\cdots,\ x^{m_1-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \cdots\cdots,\ x^{m_1-1}e^{ax}\sin bx$$

时，仍得到方程（4.21）的一个基本解组．对于其它复根也可以类似地进行处理，最后总可以得到方程（4.21）的n个线性无关的实解．

例 5 求方程

$$y''+4y'+4y=0$$

的通解．

解 特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+4=0,$$

由于 $\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2$，则 $\lambda_1=-2$ 是二重根，故所求通解为

$$y=e^{-2x}(c_1+c_2x).$$

例 6 求方程

$$y^{(4)}-4y'''+5y''-4y'+4y=0$$

的通解．

解 特征方程是

$$\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+4=0.$$

由于

$$\begin{aligned}\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+4&=\lambda^4-\lambda^2-4\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda+4\\&=(\lambda-2)^2(\lambda^2+1),\end{aligned}$$

故特征根是 $\lambda_{1,2}=2$，$\lambda_3=i$，$\lambda_4=-i$．

它们对应的实解为

$$e^{2x}, xe^{2x},\ \cos x,\ \sin x.$$

故所求通解为

$$y=e^{2x}(c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x).$$

例 7 求方程

$$y'''-3y''+3y'-y=0$$

的通解．

解 特征方程是

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0,$$

由于

$$\begin{aligned}\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1&=(\lambda^3-1)-3\lambda(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)-3\lambda(\lambda-1)\\&=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda-1)^3.\end{aligned}$$

故特征根为 $\lambda_{1,2,3}=1$．它所对应的解为

$$e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,$$

故所求通解为

$$y=e^x(c_1+c_2x+c_3x^2).$$

习 题 4.3

1．试讨论当 p，q 取什么数值时，方程 $y''+py'+qy=0$ 的一切解当 $x\to+\infty$ 时，都趋于零．

2. 试讨论，当 p，q 取什么数值时，方程 $y''+py'+qy=0$ 的一切解在 $[a,+\infty]$ 上有界，其中 a 是某确定的常数.

3. 试求下述各方程满足所给出的初始条件的解：

1）$y''-3y'+2y=0$，$y(0)=2$，$y'(0)=3$；

2）$y''-6y'+8y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$；

3）$y''+9y'+20y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=-1$；

4）$y''-y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$；

5）$y''-2y'+y=0$，$y(0)=2$，$y'(0)=4$；

6）$y''+4y'+4y=0$，$y(2)=4$，$y'(2)=0$；

7）$y''-2y'+y=0$，$y(\pi)=-2$，$y'(\pi)=-3$；

6）$y''+y'+y=0$，$y(0)=2$，$y'(0)=\frac{1}{2}$；

9）$y''+\omega^2 y=0$，$y(0)=a$，$y'(0)=Q_0$；

10）$y''+y'=0$，$y(0)=2$，$y'(0)=5$.

4. 试求下列方程的通解：

1）$y'''-y''-y'+y=0$；

2）$y'''-3y''-y'+y=0$；

3）$y'''+y=0$；

4）$y^{(4)}-y''=0$；

5）$y^{(4)}-y=0$；

6）$y^{(4)}+y=0$；

7）$y^{(6)}-2y^{(4)}-y''+2y=0$；

8）$y^{(4)}-13y+36y=0$；

9）$y'''-6y''+12y'-y=0$；

10）$y^{(5)}-5y^{(4)}+12y'''-16y''+12y'-4y=0$.

§4.5 n 阶常系数线性非齐次方程解法

现在我们来研究 n 阶常系数非齐次方程

$$L[y]\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{4.20}$$

的解法.

由定理 4.7 知，它的通解等于其对应的齐次方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{4.21}$$

的通解与它本身的一个特解之和.

又由于§4.4 的讨论，（4.21）的通解总可以求得，并且根据这一通解，使用常数变易法还能够求出（4.20）的一个特解，因而，原则上来说，我们已经有了求（4.20）通解的行之有效的方法.

但是当（4.20）式的右端的函数 $f(x)$ 是某些类型函数，诸如指数函数、正弦函

数、余弦函数、多项式或是这些类型函数的某些组合时，还有更简单的方法——待定系数法来求出（4.20）的一个特解.

这里所指的是形如下述的组合：

$$f(x)=p_m(x)e^{\alpha x},\quad f(x)=e^{\alpha x}[p_m^{(1)}(x)\cos bx+p_m^{(2)}(x)\sin bx] \tag{4.36}$$

其中，$p_m(x)$，$p_m^{(i)}(x)(i=1,2)$都是多项式.

具有（4.36）形式的右端的方程（4.20）必然具有类似于（4.36）形式的解，这是易于理解的，因将这一类函数的导数再与常数线性组合之后，还得到原类型的函数，因而可以用待定系数法来求它的特解.

顺便指出，具有（4.36）形式的右端的方程（4.20）不仅易于求解，同时，正如在前面我们已经看到那样，很多实际问题（比如，电学和力学）都归结为这类方程的研究，例如，当电源为交流电及外力为周期力时，$f(x)$就为正（余）弦函数$A\sin(\beta t+\varphi)$，当外力衰减时，$f(x)$就是$e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi)$的形状，等等．因而，给出它的简便解法，还具有重要的实际意义.

下面我们就来研究，求这类非齐次方程的一个特解的方法.

先从最简单的二阶方程

$$y''+py'+qy=e^{\alpha x} \tag{4.37}$$

开始.

易见，此时$f(x)=e^{\alpha x}$，因为 $e^{\alpha x}$ 经过微分再与常数线性组合之后，仍然是原类型函数，自然猜想（4.37）有形如

$$y=Ae^{\alpha x} \tag{4.38}$$

的特解，其中A为待定常数．下面我们就来求A使（4.38）为（4.37）的解的条件．先将（4.38）作为形式解代入（4.37）得到

$$A(\alpha^2+p\alpha+q)e^{\alpha x}=e^{\alpha x},$$

则

$$A=\frac{1}{\alpha^2+p\alpha+q}. \tag{4.39}$$

容易看出，当α不是特征方程

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{4.40}$$

的根时，则用（4.39）式所确定的A代替（4.38）式中的A，便可得到（4.37）的一个特解.

当α是方程（4.40）的特征根时，记起在解齐次方程时，如果出现重根，则所求的线性无关特解等于无重根时的特解乘以x的某次幂．因而，不妨假设特解具有形式

$$y=Axe^{\alpha x}, \tag{4.41}$$

并将它作为形式解代入（4.37）式，得

$$A(\alpha^2+p\alpha+q)xe^{\alpha x}+A(2\alpha+p)e^{\alpha x}=e^{\alpha x},$$

上式左端第一项括号内的数为零（α是特征根），故有

$$A=\frac{1}{2\alpha+p}. \tag{4.42}$$

易见，如果a是（4.40）的单根$\left(a\neq-\frac{p}{2}\right)$，这时(4.37)便有形如（4.41）的特解，其中A由（4.42）式确定．如果a是（4.40）的重根，则$a=-\frac{p}{2}$，这时（4.41）的形式已不可用，将特解改为

$$y=Ax^2e^{ax},$$

再将它作为形式解代入（4.37），得到

$$A(a^2+pa+q)x^2e^{ax}+2A(2a+p)xe^{ax}+2A=e^{ax},$$

由于a是二重根，故上式左端两个括号内的数都等于零，由此可得

$$A=\frac{1}{2}.$$

综上所述：如果a不是方程（4.40）的根，（4.37）有形如Ae^{ax}的持解；如果a是（4.40）的单根，（4.37）有形如Axe^{ax}的特解；如果a是(4.40)的重根，(4.37)有形如Ax^2e^{ax}的特解，各式中的A均可用待定系数法确定．

例 1 求方程

$$y''-3y'=e^{5x}$$

的通解．

解 由于特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda=0,\ \lambda(\lambda-3)=0,$$

特征根为

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3,$$

故对应的齐次方程的通解为

$$y_1=c_1+c_2e^{3x}.$$

又由于5不是特征根，故已知方程有形如

$$\tilde{y}=Ae^{ax}$$

的解．将它代入原方程、得到

$$25Ae^{5x}-15Ae^{5x}=e^{5x},$$

故有，$10A=1$，$A=\frac{1}{10}$，因而，已知方程有特解$\tilde{y}=\frac{1}{10}e^{5x}$，从而可得通解

$$y=c_1+c_2e^{3x}+\frac{1}{10}e^{5x}.$$

例 2 求方程

$$y''-y=\frac{1}{2}e^x$$

的通解．

解 易见，$\lambda^2-1=0$，$\lambda=\pm1$，对应齐次方程的通解为

$$y_1=c_1e^x+c_2e^{-x}.$$

由于 $a=1$是特征根，故已知方程有形如

$$\tilde{y}=Axe^{x}$$

的特解．将它代入原方程，得

$$2Ae^{x}+Axe^{x}-Axe^{x}=\frac{1}{2}e^{x},$$

从而，$2A=\frac{1}{2}$，$A=\frac{1}{4}$，故$\tilde{y}=\frac{1}{4}xe^{x}$．由此可得通解

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}xe^{x}.$$

上面关于二阶方程所得到的结果，可以进一步推广到具有右端

$$f(x)=p_m(x)e^{ax}$$

的n阶方程（4.20）上去，某中$p_m(x)$是m次实系数或复系数的多项式

$$p_m(x)=p_0x^m+p_1x^{m-1}+\cdots\cdots+p_{m-1}x+p_m \qquad (m\geqslant 1).$$

可以证明（参看$B.B$史捷班诺夫著《微分方程教程》第212～215页）：

1）a不是特征根时，（4.20）有形如

$$y_1(x)=Q_m(x)e^{ax}$$

的特解，其中

$$Q_m(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_{m-1}x+q_m$$

是m次多项式，它的系数可用待定系数法求得．

2）a为k（$\geqslant 1$）重特征根时，（4.20）有形如

$$y_1=x^kQ_m(x)e^{ax}$$

的特解，其中$Q(x)$是形如上述的m次多项式，它的系数同样可用待定系数法求得．

例 3　求方程

$$y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$$

的通解．

解　先求对应齐次方程

$$z''-5z'+6z=0$$

的通解．

特征方程是

$$\lambda^2-5\lambda+6=0.$$

由于$\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$，故特征根$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$，从而，对应齐次方程通解为

$$z=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}.$$

因为$a=0$不是特征根，因而已知方程有形如

$$y_1=Ax^2+Bx+c$$

的特解．为确定出系数A，B，C，将它代入原方程中．由于

$$y_1'=2Ax+B,\qquad y_1''=2A,$$

故

$$2A-5(2Ax+B)+6(Ax^2+Bx+C)=6x^2-10x+2,$$

或

$$6Ax^2+(6B-10A)x+2A-5B+6c=6x^2-10x+2.$$

比较上式等号两端 x 的同次幂系数，可得

$$6A=6,\ 6B-10A=-10,\ 2A-5B+6c=2.$$

解上述方程组，得

$$A=1,\ B=0,\ C=0,$$

故已知方程特解为

$$y_1=x^2.$$

已知方程的通解为

$$y=x^2+c_1e^{2x}+c_2e^{3x}.$$

例 4 求方程

$$y''-5y'=-5x^2+2x$$

的通解.

解 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-5\lambda=0,\ \lambda(\lambda-5)=0,$$

特征根为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=5$，齐次方程的通解为

$$z=c_1+c_2e^{5x}.$$

由于 $a=0$ 是单根（特征根），故已知非齐次方程有形如

$$y_1=x(Ax^2+Bx+C)$$

的特解.

将它代入已知方程，并比较 x 的同次幂系数，得

$$A=\frac{1}{3},\ B=0,\ C=0,$$

故 $y_1=\frac{1}{3}x^3$.

最后可得所求通解

$$y=\frac{1}{3}x^3+c_1+c_2e^{5x}.$$

例 5 求方程

$$y''-4y'+4y=2e^{2x}$$

的通解.

解 由于

$$\lambda^2-4\lambda+4=0,\quad \lambda_{1,2}=2,$$

故
$$z=e^{2x}(c_1+c_2x).$$

由于 $a=2$ 是二重特征根，故有

$$y_1=Ax^2e^{2x},\quad A_1=1,\quad y_1=x^2e^{2x},$$

所求通解

$$y=x^2e^{2x}+e^{2x}(c_1+c_2x).$$

下面来研究，当方程（4.20）右端是形如

$$f(x)=e^{ax}[p_m^{(1)}(x)\cos bx+p_m^{(2)}\sin bx] \tag{4.44}$$

的函数时，求它的一个特解的方法，其中，$p_m^{(1)}(x)$，$p_m^{(2)}(x)$是x的不高于m次的多项式，但其中至少有一个，其次数不小于m．当然，它们可以是常数，而且，其中一个可以恒等于零．

根据欧拉公式，有

$$\cos bx=\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2},\quad \sin ax=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}.$$

这样一来．(4.44) 可改写成

$$f(x)=p_m^{(1)}(x)e^{ax}\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}+p_m^{(2)}(x)\ e^{ax}\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}$$

$$=\tilde{p}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x}+\tilde{p}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x},$$

其中，$\tilde{p}_m^{(1)}(x)$，$\tilde{p}_m^{(2)}(x)$是m次多项式．

因此，(4.44) 式相当于两个 (4.43) 形状的函数相加．再由非齐次方程的一个性质——叠加原理，情形 (4.44) 可完全化为情形 (4.43)．下面就来介绍

叠加原理　设有非齐次方程

$$L[y]=f_1(x)+f_2(x),\tag{4.45}$$

且$y_1(x)$，$y_2(x)$分别是方程

$$L[y]=f_1(x),\ L[y]=f_2(x)$$

的解，则函数$y_1(x)+y_2(x)$是方程 (4.45) 的解．

证明　由于

$$L[y_1(x)]\equiv f_1(x),\ L[y_2(x)]\equiv f_2(x),$$

故有

$$L[y_1(x)+y_2(x)]\equiv L[y_1(x)]+L[y_2(x)]\equiv f_1(x)+f_2(x),$$

证毕．

如上所述，情形 (4.44) 由于叠加原理可化为情形 (4.43)．但实际求特解时（尤其是求实数形式的特解时），并不先化 (4.44) 为 (4.43)，而是推出在已知情况下，方程 (4.20) 的特解应具有什么形式，再用待定系数法求解．这可分如下两种情况．

1．如果$a\pm ib$不是特征根，则特解的形状为

$$y_1=Q_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x}+Q_m^{(2)}e^{(a-ib)x},\tag{4.46}$$

其中$Q_m^{(1)}(x)$，$Q_m^{(2)}(x)$是系数待定的m次多项式．

2．如果$a\pm ib$是k重特征根，特解的形状为

$$y_1=x^k[Q_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x}+Q_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x}].\tag{4.47}$$

如果把 (4.46) 及 (4.47) 化成实数形式，对应上述两种情况，可分别得到：

(1) 如果$a\pm ib$不是特征根，则特解具有形式

$$y_1=e^{ax}[Q_m^{(1)}(x)\cos bx+Q_m^{(2)}\sin bx];$$

其中$Q_m^{(1)}(x)$，$Q_m^{(2)}(x)$是系数待定的m次多项式．

(2) 如果$a\pm ib$是k重特征根，则特解应具形状

$$y_1=x^ke^{ax}[Q_m^{(1)}(x)\cos bx+Q_m^{(2)}(x)\sin bx],$$

其中 $Q_m^{(1)}(x)$，$Q_m^{(2)}(x)$ 是系数待定的m次多项式.

$Q_m^{(1)}(x)$，$Q_m^{(2)}(x)$ 系数的求法和上面类似，即把 y_1 代入原方程，再比较 x 的同次幂系数即可求得.

值得注意，即使在 $p_m^{(1)}(x)$，$p_m^{(2)}(x)$ 中有一个恒为零，这时方程（4.20）的特解仍具形状（4.46），（4.47），即，不能当 $p_m^{(1)}(x)\equiv 0$ 时在（4.46）或（4.47）中就令 $Q_m^{(1)}(x)\equiv 0$，而 $p_m^{(2)}(x)\equiv 0$ 时，就令 $Q_m^{(2)}(x)\equiv 0$.

例 6 求方程

$$y''+y'-2y=e^x(\cos x-7\sin x)$$

的通解.

解 先积分对应的齐次方程：

$$z''+z'-2z=0.$$

我们有：

$$\lambda^2+\lambda-2=0,\quad \lambda_1=1,\quad \lambda_2=-2;\quad z=c_1e^x+c_2e^{-2x}.$$

因为数 $a\pm ib=1\pm i$ 不是特征根，故原方程具有形如

$$y_1=e^x(A\cos x+B\sin x)$$

的特解.

将上式代入原方程，由于

$$\begin{aligned}
y_1&=e^x(A\cos x+B\sin x),\\
y_1'&=e^x[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x],\\
y_1''&=e^x[2B\cos x-2A\sin x].
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
y''+y'-2y&=e^x[2B\cos x-2A\sin x]+e^x[(A+B)\cos x+\\
&\quad+(B-A)\sin x]-2e^x[A\cos x+B\sin x]=\\
&=e^x(\cos x-7\sin x),
\end{aligned}$$

或

$$(3B-A)\cos x-(B+3A)\sin x=\cos x-7\sin x.$$

比较上述等式两端的 $\cos x$，$\sin x$ 的系数，可得

$$-A+3B=1,\quad -3A-B=-7,$$

因此，$A=2$，$B=1$. 故

$$y_1=e^x(2\cos x+\sin x).$$

所求通解为

$$y=e^x(2\cos x+\sin x)+c_1e^x+c_2e^{-2x}.$$

例 7 求方程

$$y''+y=2\sin x$$

的通解.

解 我们有

$$z''+z=0,\quad \lambda^2+1=0,\quad \lambda_{1,2}=\pm i,\quad z=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

由于 i 是特征方程的单根，故所求特解应具形式

$$y_1=x(A\cos x+B\sin x).$$

现将上式代入原方程，确定系数A，B. 由于

$$y_1=x(A\cos x+A\sin x),$$

$$y_1'=(A\cos x+B\sin x)+x(-A\sin x+B\cos x)$$
$$=(A+Bx)\cos x+(B-Ax)\sin x,$$

$$y_1''=B\cos x-(A+Ax)\sin x-A\sin x+(B-Ax)\cos x$$
$$=(2B-Ax)\cos x-(2A+Bx)\sin x.$$

$$y_1''+y_1=(2B-Ax)\cos x-(2A+Bx)\sin x+x(A\cos x+B\sin x)$$
$$=2B\cos x-2A\sin x=2\sin x.$$

$$A=-1,\quad B=0,\quad y_1=-x\cos x.$$

因而，所求通解为

$$y=-x\cos x+c_1\cos x+c_2\sin x.$$

例 8 求方程

$$y''-6y'+5y=-3e^x+5x^2$$

的通解.

解 我们有：

$$z''-6z'+5z=0,\quad \lambda^2-6\lambda+5=0,\quad \lambda_1=1,\quad \lambda_2=5,$$
$$z=c_1e^x+c_2e^{5x}.$$

因为原方程右端由两项组成，根据叠加原理，可先分别求下述二方程

$$y''-6y'+5y=-3e^x,\ y''-6y'+5y=5x^2$$

的特解，这二特解之和即为所求.

对于其中第一个方程，有

$$y_1=Axe^x,\ A=\frac{3}{4},\quad y_1=\frac{4}{3}xe^x.$$

对于第二个方程，有

$$y_2=Ax^2+Bx+C,\ A=1,\ B=\frac{12}{5},\ C=\frac{62}{25},$$

$$y_2=x^2+\frac{12}{5}x+\frac{62}{25}.$$

因而，

$$y_1+y_2=\frac{3}{4}xe^x+x^2+\frac{12}{5}x+\frac{62}{25}$$

为原方程的一个特解，其通解为

$$y=\frac{3}{4}xe^x+x^2+\frac{12}{5}x+\frac{62}{25}+c_1e^x+c_2e^{5x}.$$

习　　题 4.4

求下列各方程的通解：

1. $y''-7y'+12y=5$;

2. $y''+4y=8$;

3. $y''+y'+y=3e^{2x}$;

4. $\frac{d^2r}{d\varphi^2}-6\frac{dr}{d\varphi}+9r=4e^{3\varphi}$;

5. $y''-8y'+7y=3x^2+7x+8$;

6. $y''-2y'+4y=(x+2)e^{3x}$;

7. $\ddot{x}+6\dot{x}+13x=e^t(t^2-5t+2)$;

8. $y''+y=5\sin 2x$;

9. $y''-2y'+10y=x\cos 2x$;

10. $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$.

§4.6 二阶常系数方程与振动现象

本节主要是具体求解在§4.1 中所提出的，描述弹簧振动的方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+cx=f(t), \tag{4.4}$$

并且研究其解的物理意义.

如果 $f(t)\equiv 0$，即假定没有外力 $f(t)$，这时得到方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+cx=0. \tag{4.48}$$

它对应的物理过程是，在初瞬时，将物体在竖直方向上稍微拉离平衡位置，然后放开，让物体自由运动，这时方程（4.48）所描述的是**阻尼自由振动**.

如果 $f(t)\equiv 0$，，同时还有 $\mu=0$，，即假定没有外力并且忽略介质的阻力，这时得方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx=0, \tag{4.49}$$

它所描述的是**无阻尼自由振动**，或称**简谐振动**.

下面我们分别求解方程（4.49），（4.48）及（4.4），并阐明在各个情况下解的物理意义.

1°. 简谐振动——无阻尼自由振动. 令 $k^2=\frac{c}{m}$，方程（4.49）变为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0. \tag{4.50}$$

这是一个二阶常系数齐次方程. 特征方程为 $\lambda^2+k^2=0$，特征根是 $\lambda_{1,2}=\pm ik$，它的通解为

$$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt \tag{4.51}$$

其中 c_1，c_2 是任意常数.

为了阐明(4.51)的物理意义，像三角学中常做的那样，用$\sqrt{c_1^2+c_2^2}$去除它的两端，我们得到

$$x=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos kt+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin kt\right).$$

或改写成

$$x=A\sin(kt+\alpha), \tag{4.52}$$

其中

$$\sqrt{c_1^2+c_2^2}=A,\quad \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\sin\alpha,\quad \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\cos\alpha.$$

由此可见，物体在平衡位置附近作简谐振动.

量A称为**振幅**. 幅角$kt+\alpha$称为**振动的位相**（或简称位相），位相在$t=0$时所取之值，即α，称为**初位相**，$k=\sqrt{\frac{c}{m}}$是**固有振动频率**，$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$为周期. 易见，$k$仅与弹簧的刚度和物体的质量有关. 因为$c=\frac{p}{\tilde{\lambda}}=\frac{mg}{\tilde{\lambda}}$，则周期还可以表为$T=2\alpha\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{g}}$. 将(4.52)对$t$微分，可以得物体运动的速度

$$v=\frac{dx}{dt}=Ak\cos(k^{t}+\alpha).$$

为了确定振幅及初位相，必须给出初始条件. 例如，假设在初始时刻$t=0$时，物体的位置是$x=x_0$，速度是$v=v_0$. 这时有

$$x_0=A\sin\alpha,\quad v_0=Ak\cos\alpha.$$

从而

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}},\quad \alpha=arc\mathrm{tg}\frac{kx_0}{v_0}.$$

由上述公式可以看出，振幅A与位相α和振动的周期及频率不同，它们都和系统的初始状态有关.

2°. 阻尼自由振动. 如果令$\frac{c}{m}=k^2$，$\frac{\mu}{m}=2n$，则方程(4.48)就变为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \tag{4.53}$$

的形式. 它是一个二阶常系数线性齐次方程. 它的特征方程是$\lambda^2+2n\lambda+k^2=0$，特征根是

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}. \tag{4.54}$$

现在分三种情况讨论.

(1) $n^2-k^2<0$，这时对应于介质阻尼不太大的情形. 如果令$k^2-n^2=k_1^2$，则(4.54)

具有

$$\lambda_{1,2} = -n \pm ik_1$$

的形式．这时，方程（4.53）的通解为

$$x = e^{-nt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t).$$

用类似的方法可将它化为

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha). \tag{4.55}$$

如果初始条件为：$t=0$；$x=x_0$，$v=v_0$．为了确定出相应的A及α，先来计算

$$v = \frac{dx}{dt} = Ak_1 e^{-nt}\cos(k_1 t + \alpha) - Ane^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha),$$

将$t=0$代入x及v的表达式中，可得

$$x_0 = A\sin\alpha,$$

$$v_0 = Ak_1 \cos\alpha - An\sin\alpha.$$

用第二个方程的两端除以第一个方程相应的两端，得

$$\frac{v_0}{x_0} = k_1 \operatorname{ctg}\alpha - n,$$

从而 $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{v_0 + nx_0}{k_1 x_0}$，$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}$，从而，

$$\alpha = ar\operatorname{ctg}\frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}.$$

因为

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\dfrac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}}{\sqrt{1 + \dfrac{k_1^2 x_0^2}{(v_0 + nx_0)^2}}}$$

$$= \frac{k_1 x_0}{\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}}.$$

则

$$A = \frac{x_0}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}}{k_1}.$$

（4.55）式表明，这时所发生的是阻尼振动，实际上，振幅Ae^{-nt}是时间t的递减函数，且当$t \to +\infty$时，$Ae^{-nt} \to 0$．

振动的周期由式

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

确定．

振动频率$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$较简谐振动的频率要小（$k_1 < k$），它也与物体的初始状态无关．

（2）$n^2-k^2=0$．这时通解为

$$x=e^{-nt}(c_1+c_2t), \tag{5.56}$$

此时运动不具振动性质且当 $t\to+\infty$ 时，$x\to0$．

（3）$n^2-k^2>0$，这时对应介质阻尼较大的情形．令 $n^2-h^2=k^2$，特征根为

$$\lambda_{1,2}=-n\pm h=-(n\mp h).$$

因为 $h<n$，故这时两个特征根均为负，通解为

$$x=c_1e^{-(n+h)t}+c_2e^{-(n-h)t}.$$

易见，此时运动不是周期的，因而不具振动性质，且当 $t\to+\infty$ 时，$x\to0$．

3° 阻尼强迫振动，设作用于物体的外力

$$f(t)=Q\sin pt,$$

其中 p．Q 均为常量．这时，方程（4.4）具形式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=q\sin pt, \tag{4.57}$$

其中 $2n=\frac{\mu}{m}$，$k^2=\frac{c}{m}$，$q=\frac{Q}{m}$．

这是一个二阶常系数线性非齐次方程．它所对应的齐次方程是（4.53）．我们假定介质阻尼不太大，即 $n^2-k^2<0$，这时齐次方程有形如

$$X=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)$$

的通解，其中 $k_1=\sqrt{k^2+n^2}$．这个解确定的是一个衰减的自由振动．

根据（4.57）右端的形状，它有形如

$$\bar{x}=M\cos pt+N\sin pt$$

的特解，其中M，N均为常数．

为求出M，N，将 $\bar{x}$ 代入（4.57）比较系数即可．为此先来计算

$$k^2\bar{x}=(M\cos pt+N\sin pt)k^2,$$

$$2n\bar{x}'=(-Mp\sin pt+Np\cos pt)2n,$$

$$\bar{x}''=-Mp^2\cos pt-Np^2\sin pt.$$

将上述各式代入（4.50），比较系数可得方程组

$$\begin{cases} M(k^2-p^2)+2pN=0 \\ -2npM+(k^2-p^2)N=q. \end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix} k^2-p^2 & 2np \\ -2np & k^2-p^2 \end{vmatrix}=(k^2-p^2)^2+4n^2p^2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2np \\ -qp & k^2-p^2 \end{vmatrix}=-2npq, \quad \begin{vmatrix} k^2-p^2 & 0 \\ -2np & q \end{vmatrix}=q(k^2-p^2),$$

故有

$$M=-\frac{2npq}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}, \qquad N=\frac{q(k^2-p^2)}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}.$$

因而，所求特解为

$$\bar{x}=\frac{q}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}[-2np\cos pt+(k^2-p^2)\sin pt].$$

上述表达式可以写成如下形式

$$\bar{x}=\frac{q}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\left[\frac{2np}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\cos pt+\right.$$

$$\left.\frac{k^2-p^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin pt\right].$$

若令

$$\frac{q}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=B,\quad \frac{2np}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=\sin\delta,$$

$$\frac{k^2-p^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=\cos\delta, \tag{4.58}$$

则

$$\bar{x}=B\sin(pt-\delta). \tag{4.59}$$

表达式

$$\delta=arctg\frac{2np}{k^2-p^2}$$

称为相位差．（4.57）的通解为

$$x=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)+B\sin(pt-\delta). \tag{4.60}$$

在前面已经看到，上式的第一项当$t\to+\infty$时，很快地消失，因而，（4.60）的主要项应是它的第二项：

$$x=\frac{q}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt-\delta). \tag{4.60$'$}$$

下面主要来研究这一项．

首先，不难发现，(4.60′)的振幅与t无关并且和周期性外力$Q\sin pt$的振幅成比例$\left(因为Q=\frac{q}{m}\right)$．其次，由于

$$B'(p)=\frac{q[(k^2-p^2)2p-4n^2p]}{[(k^2-p^2)^2+4n^2p^2]^{\frac{3}{2}}},$$

易见，如果$k^2>2n^2$，在$P=\sqrt{k^2-2n^2}$时，$B(p)$取极大值．这时振幅的最大值为

$$B=\frac{q}{2n\sqrt{k^2-n^2}}. \tag{4.61}$$

在$k^2<2n^2$时，$B(p)$不取极值．

我们称$\tilde{p}=\sqrt{k^2-2n^2}$为共振频率．这时产生的现象称为共振现象．（4.61）所确定的B称为共振振幅．

如果n很小，则$\tilde{p}\approx k$．且（4.61）表明，当$n\to0$时，$B\to+\infty$．即当阻尼很小

时，若系统的固有频率k接近于外力的频率，共振振幅可以变得很大.

我们回想起，本章开始时对于如图4.1所示的电路当电动势源为周期交变电动势$E=E_0\cos wt$时，电容器极板上的电荷量满足如下方程

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=E_0\cos\omega t. \tag{4.62}$$

容易看出，它与方程(4.4)十分相似，两者之间存在对应关系：

质量M←——→电感L；

阻尼系数μ←——→电阻R；

c←——→电容的倒数；

位移x←——→电容器极板上的电荷量q.

上述的力学系统与电学系统之间的相似性，使得它们各个求解过程的数学运算也一模一样. 因而，我们可以把对于力学系统的计算结果，照搬到电学系统上去. 并可同样研究电路中电流的振荡性质，诸如，自由振动，阻尼自由振动，强迫振动以及共振等等. 有关问题，作为习题留给读者，并建议去研究其物理意义.

此外，这种相似性，使得用电学系统去模拟力学系统成为可能. 由于电学系统易于实现，从而，这种模拟就大大地减化了对力学系统的研究，模拟式电子计算机就是根据这一思想设计制造的.

共振现象有十分广泛的应用. 例如，在无线电接收机中利用共振现象进行调谐，在工业上也有利用共振现象的振动泵等等. 但是，由于共振现象，使得一个系统在不大的周期外力作用下能够产生振幅很大的振动，因而，对于机械系统来说，往往造成灾难性的后果. 例如一部电动机固定在某一弹性座台上. 电动机转动时将产生周期性外力. 这力传给座台，使它处于强迫振动之中，当外力频率接近座台的固有频率时，便产生共振. 这时座台的振幅往往能大到使它本身遭到破坏的程度，为避免产生共振，就要事先计算出固有频率，并采取某种防止共振的措施.

习　题 4.5

1. 一拉紧弹簧所受到的拉力与它的长度伸长成正比，当长度增长1厘米时，弹簧拉力为一千克. 今有重2千克的物体挂在弹簧下端，保持平衡. 假若将它稍向下拉，然后再放开，试求由此所产生振动的周期.

2. 一重为$p=4$千克的物体挂在弹簧下端，它使弹簧的长度增长1厘米，假定弹簧的上端有一转动机产生铅直调合振动$y=2\sin 30t$（厘米），并在初始时刻$t=0$时，重物处于静止状态，试求该重物的运动规律.

3. 一质量为m的质点由静止开始沉入液体中，当下沉时，液体的反作用与下沉的速度成正比，求此质点的运动规律.

4. 在LC电路中(图4.3)，先将开关拨到"1"处，对电容器充电到电源电压U_0，然后再将开关

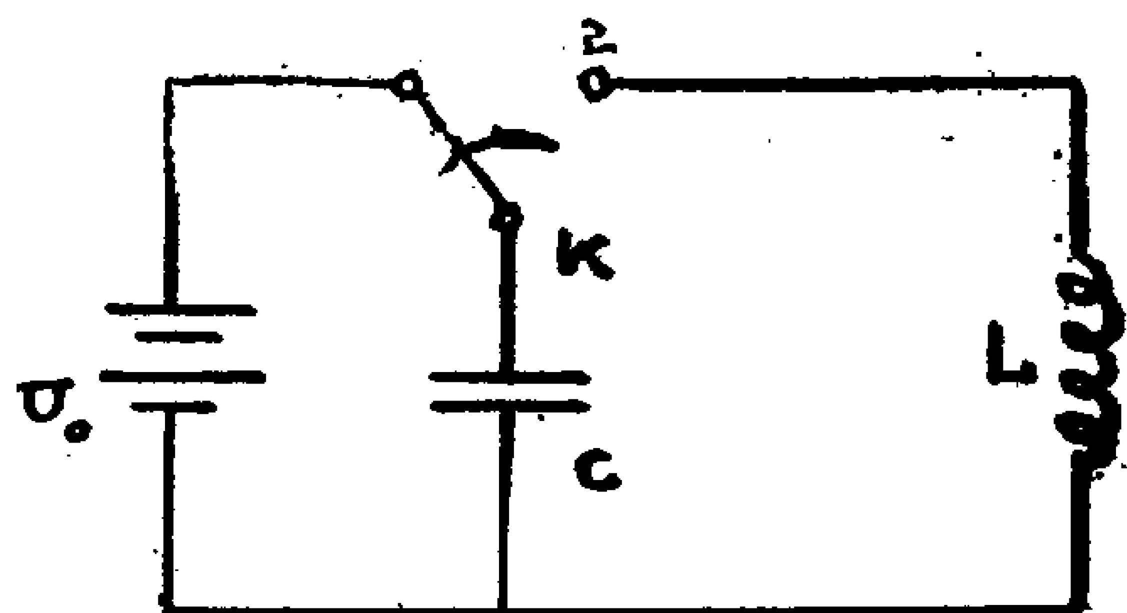


图 4.3

拨到“2”处，如果

$C=2\times10^{-9}$ 法拉，$L=5\times10^{-4}$ 亨利，求此 LC 电路中的电流 $i(t)$ 和电容器两端的电压 $v_C(t)$.

5．有一 LRC 电路，其中 LC 并联，再与 R 及电源 $E=v\sin wt$ 串联，试求，(1) 通过电阻 R 的电流强度；(2) 在角频率等于何值时，电流强度最大或最小？

6．有一 LRC 电路，其中 RC 并联，再与 L 及直流电源 E 串联，试求通过电感 L 的电流 $i(t)$，假定在 $t=0$ 时，$i(0)=0$.

§4.7 幂级数解法

许多二阶线性方程

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \tag{4.63}$$

的解一般都不能用“有限形式”表示出来，由于它们在应用上占有重要地位，往往这些解作为新的超越函数而被引入．比如第一类、第二类贝塞尔（*Bessel*）函数（即，贝塞尔方程的两个线性无关的解）就是这样的．

下述的讨论是以下面定理为基础的：

定理4.10 如果方程（4.63）的系数 $p_0(x)$，$p_1(x)$，$p_2(x)$ 在某点 x_0 解析，即 $p_0(x)$，$p_1(x)$，$p_2(x)$ 在 $x=x_0$ 某邻域可展成 $(x-x_0)$ 的幂级数，则（4.63）的解也能用 $(x-x_0)$ 的幂级数表示．即，如果 $p_0(x_0)\neq0$，则（4.63）的解可表为普通的幂级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n; \tag{4.64}$$

如果 $p_0(x_0)=0$，则方程（4.63）的解可表为广义幂级数

$$y=(x-x_0)^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r},$$

这里总假定 $a_0\neq0$，r 是待定常数．

这个定理在此不准备进行证明．下面仅举两个例子来说明如何应用这一定理去解决一些具体问题．

例 1 求 $y''-xy=0$ 的通解．

解 由于 $p_0(x)=1$，$p_2(x)=-x$ 在 $x=0$ 点解析，且 $p_0(0)\neq0$，依定理4.10可假定它有级数解

$$y=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

将它对 x 微分两次，得

$$y''=2\cdot1a_2+3\ 2a_3x+\cdots\cdots+n\cdot(n-1)a_nx^{n-2}+n(n+1)x^{n-1}+$$
$$+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\cdots.$$

将 y 及 y'' 的表达式代入原方程中，得

$$2\cdot1a_2+3\cdot2a_3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$
$$-x[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots]\equiv0.$$

比较上述等式两端的 x 的同次幂的系数，得

$2\cdot 1a_2=0$，$3\cdot 2a_3-a_0=0$，$4\cdot 3a_4-a_1=0$，$5\cdot 4a_5-a_2=0\cdots$等等.

从而，

$$a_2=0,\quad a_3=\frac{a_0}{3\cdot 2},\ a_4=\frac{a_1}{4\cdot 3},\ a_5=\frac{a_2}{5\cdot 4}\cdots\cdots$$

或一般地可推得

$$a_{3k}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3k-1)3k},\quad a_{3k+1}=\frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3k(3k+1)},$$

$$a_{3k+2}=0,$$

其中，a_0，a_1 是任意的．因而

$$y=a_0\left[1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3n-1)3n}+\cdots\right]+$$

$$+a_1\left[x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3n(3n+1)}+\cdots\right].$$

这个幂级数的收敛半径是无限大，因而级数的和（其中包括两个任意常数a_0及a_1）便是所要求的通解.

例 2 求方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

在 $x=0$ 点邻域内的幂级数解，其中 n 为常数.

这个方程称为贝塞尔方程，它的解不能用初等函数表示，它定义出一类新的超越函数，称为贝塞尔函数．它在无线电电子学，工程技术及天文学中有着广泛的应用.

解 由于 $p_0(0)=0$，我们来求形如

$$y=\sum_{p=0}^{\infty}a_px^{r+p}\qquad(a_0\neq 0)$$

的解.

将上述级数逐项微分两次，并代入原方程中，得

$$x^2\sum_{p=0}^{\infty}a_p(r+p)(r+p-1)x^{r+p-2}+$$

$$+x\sum_{p=0}^{\infty}a_p(r+p)x^{r+p-1}+(x^2-n^2)\sum_{p=0}^{\infty}a_px^{r+p}\equiv 0.$$

比较 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{cases}a_0[r^2-n^2]=0,\\ a_1[(r+1)^2-n^2]=0,\\ a_2[(r+2)^2-n^2]+a_0=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_p[(r+p)^2-n^2]+a_{p-2}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}\qquad(4.64)$$

因为 $a_0\neq 0$，则有 $r^2-n^2=0$，从而 $r=\pm n$．为确定起见，暂令 $r=n\geqslant 0$，由(4.64)

中的第二个方程可得

$$a_1=0,\quad a_{2p+1}=0,\quad a_2=-\frac{a_0}{(n+2)^2-n^2}=-\frac{a_0}{2^2(n+1)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(n+4)^2-n^2}=-\frac{a_2}{2^2(n+2)\cdot 2}=\frac{a_0}{2^4(n+1)(n+2)1\cdot 2},$$

………………………………………………………………………

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}\cdot p!(n+1)(n+2)\cdots(n+p)},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因此，在 $r=n>0$ 时，得到贝塞尔方程的解

$$y=a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2^{2p}p!(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}.$$

若将任意常数 a_0 取为

$$a_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)},$$

其中

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{p-1}dx,$$

且在 $p>0$ 时，$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$，这个解就具有更为简单的形式.

$$y=\frac{(-1)^p\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!\Gamma(n+p+1)}.$$

通常称上述级数为 n 级第一类贝塞尔函数，并用 $J_n(x)$ 表示.

当 $r=-n<0$ 时，完全类似可得

$$a_{2p+1}=0,$$

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}p!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+p)}\quad(n\text{不为正整数}).$$

若取

$$a_0=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)},$$

这时得到 $-n$ 级第一类贝塞尔函数，记为

$$J_{-n}(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}}{p!\Gamma(-n+p+1)}\quad(n\text{不为整数}).$$

由于级数 $J_n(x)$，$J_{-n}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛，故都是原方程的解.

于是原方程的通解为

$$y=c_1J_n(x)+c_2J_{-n}(x)\quad(n\text{不为整数}),$$

其中 c_1，c_2 为任意常数.

若 n 是整数时，利用这个方法只能得到一个特解，与它线性无关的另一特解要用其

它方法才能求得，这个特解所确定的函数称为第二类贝塞尔函数，具体求法在此不准备介绍.

综上所述，使用定理 4.10 求解方程(4.63) 的过程如下. 首先，将 $p_0(x)$，$p_1(x)$ 展成（$x-x_0$）的幂级数，再根据 $p_0(x_0)\neq 0$ 或 $p_0(x_0)=0$ 不同的两种情况，分别在形式上假定（4.63）具有形如(4.64)或（4.65）的解. 在 $p_0(x_0)\neq 0$ 时，将（4.64）代入原方程（这时，要形式上微分系级数(4.64)），并令等式两端 x 的同次幂系数相等（即使用所谓无限的待定系数法)，从而得到关于（4.64）的系数 a_k 的方程，解出 a_k 代入（4.64）中，便可得到（4.63）的形式解. 求出（4.64）的收敛区间，由于在收敛区间上可以进行逐项积分与微分，这表明在前面将（4.64）代入（4.63）中时所进行的逐项微分运算是合理的，即，最后所得到的幂级数（4.64）在收敛区间内确实是我们所要求的解. 在 $p_0(x_0)=0$ 时，解法过程一样，将（4.64）代入（4.63），比较 x 的最低次幂的系数可得 r 之值，再比较其它同次幂的系数，便可求得 a_k 之值.

这种方法也适用于高阶线性齐次与非齐次方程，对有关内容感兴趣的同志可参阅其它教程.

§4.8 二阶线性方程解的振动性质

由前面讨论知道，二阶方程和力学、电学系统中的振动现象的联系极为密切. 对于常系数线性方程，我们可以求出它的解来，从而，对于它的解的振动性质易于研究，这正如我们在§4.6 中所做的那样. 可是，对于变系数的线性方程，由第一章讨论就已知道，一般来说，求不出用初等函数所表示的解来，这就给研究它们解的振动性质造成了极大困难. 虽然在§4.7 中给出这类方程的幂级数解法，要把解表为幂级数的形状也是很困难的，而且用级数解来研究其振动性质也极为不便. 自然提出问题，能否根据方程的系数性质来研究它们解的性质呢？斯图姆（*Sturm*，1803～1855）作了这方面的开创性工作，并得到极为重要的结果. 他的研究方法是定性地研究微分方程的萌芽，他所提示的思想在庞卡莱（*Poincaré*）的工作中得到了重大发展，这将在本书第六章加以介绍.

1° 振动解与非振动解

我们研究二阶线性齐方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{4.65}$$

解的振动性质，实质就是研究它的非零解的零点分布问题，因为要振动就必须反复穿过平衡位置. 在以后的讨论中，总假设系数 $p(x)$，$q(x)$ 都是某区间（a，b）上的连续函数.

所谓方程（4.65）的非零解 $y=y(x)$ 在区间 (a,b) 上的零点，指的是方程 $y(x)=0$ 在（a, b）上的实根.

如果方程（4.65）的解 $y=y(x)$（自然指非零解）在区间（a, b）上存在不少于两个零点，则称解在（a, b）上振动，相反则称 $y(x)$ 在（a, b）上不振动.

例如，已知方程

$$y''-k^2y=0,\ y''+k^2y=0 \quad (k\neq 0) \tag{4.66}$$

的通解分别是

$$y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx},$$

$$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx=A\sin(kx+\varphi).$$

容易看出，第一个方程的任意解在任意区间 $(a,\ b)$ 上均不多于一个零点；而第二个方程的任一个解，由于它所表示的是周期为 $T=\frac{2\pi}{k}$ 的简谐振动，故在长度大于 $\frac{2\pi}{k}$ 的任意区间 $(a,\ b)$ 上至少有两个零点．因而，(4.66) 中第一个方程的任一解在任意区间 $(a,\ b)$ 上都不振动，而第二个方程的所有解在长度大于 $\frac{2\pi}{k}$ 的任意区间上都振动．

一般来说，对于方程

$$y''+qy=0, \tag{4.67}$$

其中 q 是常量，它的解的振动性质完全决取于系数 q 的符号：当 $q>0$ 时，解是振动的；当 $q<0$ 时，解是不振动的；当 $q=0$ 时，方程 (4.67) 变为

$$y''=0,$$

它的所有解显然是不振动的，因而，条件

$$q\leqslant 0$$

是方程 (4.67) 不存在振动解的充分条件．

另外，当 $q>0$ 时，设 $k^2=q$，则 (4.67) 的解

$$y=A\sin(kx+\varphi)$$

的振动频率恰为

$$n=\frac{1}{T}=\frac{k}{2\pi}=\frac{\sqrt{q}}{2\pi},$$

可见，q 越大，解振动越快，周期越小，从这个性质出发，我们有如下的比较定理．

2° 比较定理

先来研究两个具体的常系数方程

$$y''+y=0,\ z''+4z=0 \tag{4.68}$$

它们的通解分别是

$$y(x)=A\sin(x+\varphi),\ z(x)=B\sin(2x+\psi).$$

$y(x)$ 的两个零点间距离为 π，$z(x)$ 的两个零点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$．于是，$y(x)$ 的任两个零点之间，至少有 $z(x)$ 的一个零点，从振动的观点来看，就是 $z(x)$ 比 $y(x)$ 振动的快．

对于一般方程

$$y''+q_1y=0,\ z''+q_2z=0$$

来说，其中 q_1，q_2 是正的常数并且 $q_2>q_1$，也有类似的结果．不仅如此，这个结果还可以推广到变系数方程上去．

定理4.11 已知二方程

$$y''+q_1(x)y=0,\ z''+q_2(x)z=0 \tag{4.69}$$

其中 $q_1(x)$, $q_2(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 上连续，且有

$$q_2(x)\geqslant q_1(x) \qquad (a<x<b).$$

其次，设 $\bar{y}=\bar{y}(x)$ 是 (6.69) 中第一个方程的任一解，如果 $\bar{y}(x)$ 的任两个相邻零点之间存在有使 $q_2(x)>q_1(x)$ 的点 x，则在该二相邻零点之间第二个方程的任一解 $\bar{z}=\bar{z}(x)$ 至少有一个零点.

证明 设 x_0 和 x_1 $(x_0<x_1)$ 是解 $\bar{y}=\bar{y}(x)$ 的两个相邻零点，需要证明存在点 x^*，$x_0<x^*<x_1$，使得 $\bar{z}(x^*)=0$.

用反证法，设 $\bar{z}(x)\neq 0$ 在 $(a,\ b)$ 上恒成立. 不妨认为在 (a,b) 上有 $\bar{y}(x)>0$，$\bar{z}(x)>0$.

将解 $\bar{y}(x)$，$\bar{z}(x)$ 分别代入方程 (4.69) 中去，得到恒等式:

$$\bar{y}''+q_1(x)\bar{y}=0,$$
$$\bar{z}''+q_2(x)\bar{z}=0.$$

分别用 $\bar{z}$，$\bar{y}$ 乘上述二式，并由第一个等式减去第二个等式，得到

$$\bar{y}''\bar{z}-\bar{z}''\bar{y}=[q_2(x)-q_1(x)]\bar{y}\bar{z}$$

或

$$(\bar{y}'\bar{z}-\bar{z}'\bar{y})'=[q_2(x)-q_1(x)]\bar{y}\bar{z}.$$

对于上式从 $x=x_0$ 到 $x=x_1$，进行积分，并注意到 $\bar{y}(x_0)=\bar{y}(x_1)=0$，得到

$$\bar{y}'(x_1)\bar{z}(x_1)-\bar{y}'(x_0)\bar{z}(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}[q_2(x)-q_1(x)]\bar{y}\bar{z}dx. \tag{4.70}$$

因为 $\bar{y}'(x_1)<0$，$\bar{y}'(x_0)>0$，$\bar{z}(x_1)>0$，$\bar{z}(x_0)>0$，故 (4.70) 式左端非正，但是依假设 $q_2(x)-q_1(x)$ 在 $(x_0,\ x_1)$ 上非负，并且 $\bar{y}(x)>0$，$\bar{z}(x)>0$，故(4.70) 式右端非负，这一矛盾就证明了本定理的断言，证毕.

上述定理表明，在 $\bar{y}(x)$ 的两个相邻零点之间至少有 $z(x)$ 的一个零点，所以我们也可以理解为第二个方程的解振动得比第一个方程的解强烈.

在实际应用上述比较定理时，常常用常系数方程来与变系数方程进行比较. 例如要研究方程

$$y''+q(x)y=0 \tag{4.71}$$

解的振动性质. 已知 $q(x)$ 是某区间 $(a,\ b)$ 上连续的正值函数; M，m 分别表示 $q(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上的最大值与最小值 $(M>m>0)$.

前面已知，方程

$$y''+my=0,\ y''+My=0$$

解的相邻零点的距离（解的振动周期）分别是 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ 及 $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$. 将它们分别与方程 (4.71) 进行比较，由于

$$m\leqslant q(x)\leqslant M,$$

根据定理 4.11 即可知，方程 (4.71) 的解的零点的距离不大于 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ 而不小于 $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

例 1 研究方程

$$y''+xy=0 \tag{4.72}$$

的解 $y(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的振动性质.

解 我们将方程（4.72）与方程

$$z''+k^2z=0$$

进行比较，不难发现，如果 $x>k^2$，则（4.72）的相邻零点距离小于 $\frac{\pi}{k}$，因而当 x 无限增大时，这一距离将趋于零，故方程（4.72）任一个解的相邻零点，当 x 无限增大时，将无限地靠近.

注 对于一般形状的二阶线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{4.65}$$

可借助变换

$$y=e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z \tag{4.73}$$

化成形如（4.71）的方程.

实际上，将（4.73）代入（4.65），由于

$$y'=-\frac{p(x)}{2}e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z+e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z',$$

$$y''=-\frac{p'(x)}{2}e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z+\frac{p^2(x)}{4}e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z-\frac{p(x)}{2}e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z'$$

$$-\frac{p(x)}{2}e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z'+e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z''.$$

将上述的 y'，y'' 的表示式代入（4.65）中，整理后可得

$$z''+\left(\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)+q(x)\right)z=0. \tag{4.74}$$

若令

$$Q(x)=-\frac{1}{4}p^2(x)\quad\frac{1}{2}p'(x)+q(x),$$

（4.74）变为

$$z''+Q(x)z=0, \tag{4.75}$$

它已具有（4.71）的形状了.

由变换（4.73）容易看出，方程(4.15）的解 $y(x)=e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z$ 与方程（4.75）的解 $z(x)=y(x)e^{\int\frac{p(x)}{2}dx}$ 在同一区间上具有相同的零点及振动性质，因而，在研究方程（4.65）解的振动性质时，只要通过变换（4.73）将（4.65）化为（4.75），这样就可以应用比较定理（定理4.11）去研究它的解的振动性质了.

例 2 试研究贝塞尔方程

$$x^2y''+axy'+(x^2-n^2)y^2=0 \tag{4.76}$$

解的零点.

解 用 x^2 除以（4.76）的两端，得

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-n^2}{x^2}y=0. \tag{4.77}$$

应用变换

$$y=e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z$$

于方程（4.76），由于在此$p(x)=\frac{1}{x}$，故

$$y=e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z=e^{ln\frac{1}{\sqrt{x}}}z=\frac{z}{\sqrt{x}},$$

可得

$$z''+\left(1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)z=0. \tag{4.78}$$

当$n^2<\frac{1}{4}$时，z的系数大于1，当$n^2>\frac{1}{4}$时，小于1.

因而，我们将方程（4.78）与方程

$$y''+y=0 \tag{4.79}$$

比较，由于(4.79)解的相邻零点距离为π，所以，当$-\frac{1}{2}<n<\frac{1}{2}$ $\left(n^2<\frac{1}{4}\right)$时，贝塞尔方程解的相邻零点距离小于$\pi$，而当$n>\frac{1}{2}$或$n<-\frac{1}{2}$ $\left(n^2>\frac{1}{4}\right)$时，大于$\pi$.

当$n=\pm\frac{1}{2}\left(n^2=\frac{1}{4}\right)$时，贝塞尔方程解的相邻零点距离精确地等于$\pi$

习　　题 4.6

1. 已知方程$y''+Q(x)y=0$，其中$Q(x)$在$[a, b]$上连续，试证明方程的任一非零解在$[a, b]$上只能有有限个零点.

2. 已知方程$y''+Q(x)y=0$，其中$Q(x)$在$[0, +\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=k<0$，试证明，方程的任一非零解在$[0, +\infty)$上只能有有限个零点.

3. 已知方程$y''+Q(x)y=0$，其中$Q(x)$在$[0, +\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=k>0$，试证明，方程的任一非零解在$[0, +\infty)$上有无穷多个零点.

4. 已知方程$y''+Q(x)y=0$，其中$Q(x)$在$[0, +\infty)$上大于零，且连续单调递增，$y=y(x)$是它的任一非零解，它的零点序列为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

则必有

$$x_n-x_{n-1}>x_{n+1}-x_n.$$

第四章综合习题

1. 设$y_1(x)$，$y_2(x)$，……，$y_n(x)$是定义在(a, b)上有直到n阶连续导数的n个函数，且当$x \in (a, b)$时，它的朗斯基$W(x) \neq 0$，则以上述函数组为基本解组的n阶线性齐次方程为

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \cdots\cdots y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) \cdots\cdots y_n'(x) & y' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) \cdots y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 .$$

其中y表示未知函数，$y^{(k)}(k=1,2,\cdots,n)$表示未知函数的k阶导数.

2. 求作以下列函数组：

1）x，x^2，x^3；

2）t，e^t；

3）$e^t \cos t$，$e^t \sin t$；

4）1，$\sin t$，$\cos t$

为基本解组的齐次方程式.

3. 设函数组$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_n(x)$的朗斯基在(α, β)上恒等于零，且矩阵

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots\cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots\cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \varphi_2^{(n-2)}(x) & \cdots\cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \end{pmatrix}$$

的秩等于$n-1$，试证明，已知函数组在(α, β)上某一子区间上是线性相关的.

4. 已知方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$，$p(x)$，$q(x)$在$[a, b]$上连续，则它的任一非零解在$[a, b]$上只能有有限个零点.

5. 已知方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$，$p(x)$，$q(x)$在$[a, b]$上连续，且$q(x)<0$，则它的任一非零解在$[a, b]$上最多只有一个零点.

6. 已知方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$，$p(x)$，$q(x)$在(a, b)上连续，如果$y_1(x)$，$y_2(x)$是方程的二个线性无关解，且a_1，b_1是$y_1(x)$的两个相邻的零点，$(a_1, b_1) \subset (a, b)$，则$y_2(x)$在$(a_1, b_1)$上有且仅有一个零点.

7. 在方程$xy'+ay=f(x)$中，$f(x)$在$[0, 1]$上连续，且$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=b$（$b$为常数），试证明：

1）如果$a>0$，则方程只有一个解，且当$x \to 0$时，有有限极限，求出此解和其极限值；

2）如果$a>0$，则方程的所有解当$x \to 0$时，均有相同极限，求出此极限值.

8．　如果$|f(x)|\leqslant\frac{C}{t^{1+\alpha}}(\alpha>0)$，试证明，方程$v''+(1+f(t))v=0$具有这样两个解$v_1(t)$，$v_2(t)$，使当$t\to+\infty$时，

$$v_1(t)=\cos t+o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right),$$

$$v_2(t)=\sin t+o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right).$$

第五章　线性微分方程组

§5.1　线性微分方程组的一般概念

先给出一个实际例子，为了消除不需要的振动的一个方法是设置减振器，图5.1是一个典型的设有减振器的系统.

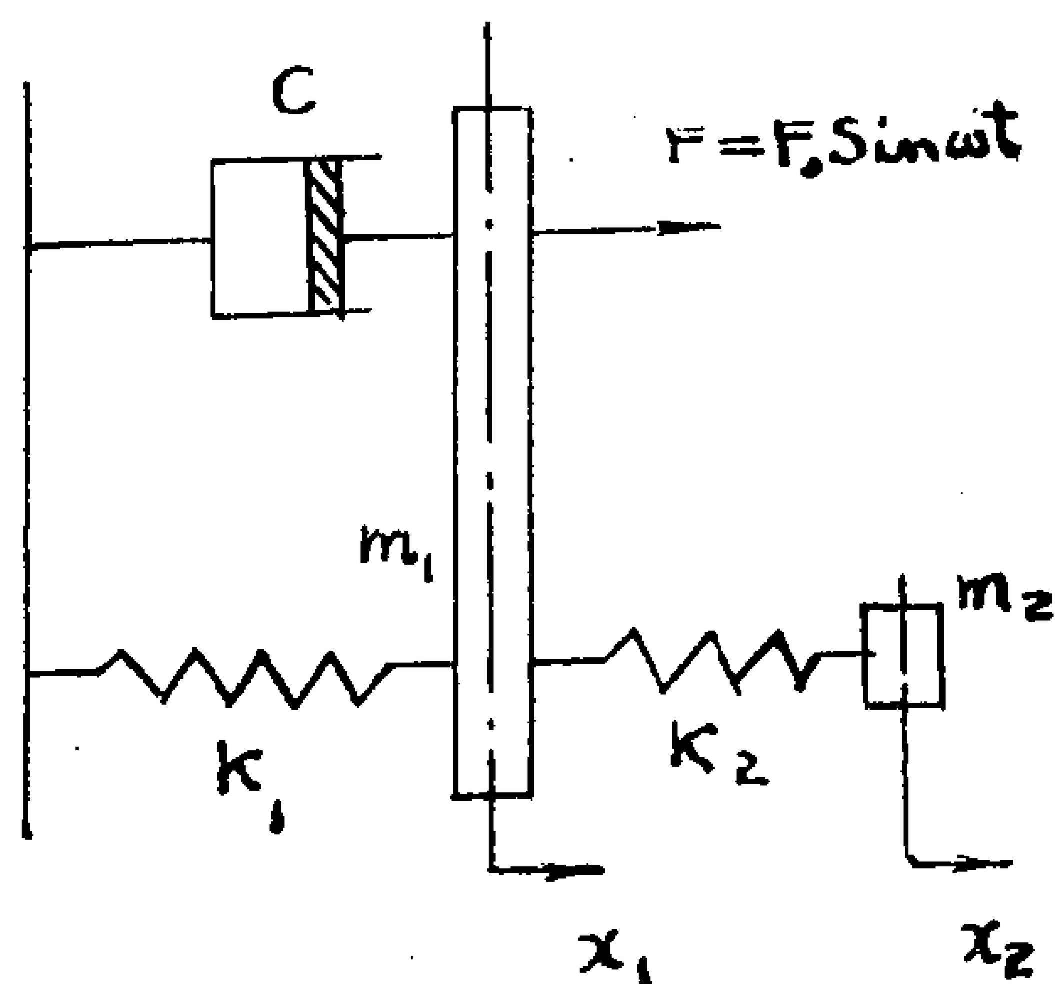


图　5.1

图5.1中，m_1是原机械部件的质量；m_2是减振器的质量；k_1和k_2是两个弹簧的弹性系数（或称为刚度）；c是减速器（假定阻力与速度成正比）的阻尼系数；F是强迫力；x_1和x_2分别表示m_1和m_2距它们的平衡位置的位移.

下面来建立这个系统的运动方程．先分别考虑物体m_1和m_2的受力情况.

1.　物体m_2的受力情况

假定弹簧k_1和k_2都满足虎克（Hook）定律．当物体m_1位移x_1时，物体m_2同时位移x_2．这时，弹簧k_2变形（拉长或压缩）的长度为x_2-x_1，因此，这时弹簧k_2的弹性力是$-k_2(x_2-x_1)$（力的方向与位移方向相反），由牛顿第二定律，有方程

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k_2(x_2-x_1).$$

2.　物体m_1的受力情况

1）　沿位移方向的外力：$F=F_0\sin\omega t$；

2）　阻尼力：$-c\dfrac{dx_1}{dt}$（方向与速度方向相反）；

3）　这时物体m_1受到两根弹簧的作用：弹簧k_1的弹性力$-k_1x_1$；弹簧k_2的弹性力$k_2(x_2-x_1)$．由牛顿第二定律，有

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_0\sin\omega t-c\frac{dx_1}{dt}-k_1x_1+k_2(x_2-x_1).$$

因此，上述运动系统满足微分方程组：

$$
\begin{cases}
m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + c\dfrac{dx_1}{dt} + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \sin\omega t \\
m_1 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2(x_2 - x_1) = 0 .
\end{cases}
$$

上述方程组在变换

$$
\frac{dx_1}{dt} = y_1 \text{ 及 } \frac{dx_2}{dt} = y_2
$$

下，变成如下的一阶方程组.

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = y_1 \\
m_1 \dfrac{dy_1}{dt} + c y_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \sin\omega t \\
\dfrac{dx_2}{dt} = y_2 \\
m_2 \dfrac{dy_2}{dt} + k_2(x_2 - x_1) = 0 .
\end{cases} \tag{5.1}
$$

在这方程组中，每一个方程关于未知函数 x_1，y_1，x_2，y_2 及其导数都是一次的， 即所谓线性的. 因此，称它是**一阶线性**常微分方程组.

线性微分方程组也是研究非线性方程组的重要工具. 下面举一简单例子予以说明.

我们来研究单摆的振动（如图5.2). 如所周知，它的微分方程如下：

$$
\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{5.2}
$$

令 $\dfrac{d\varphi}{dt} = \psi$，(5.2)变成方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi}{dt} = \psi \\
\dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin\varphi.
\end{cases} \tag{5.3}
$$

易见，这是一个非线性方程组. 摆的平衡位置是 $\varphi = 0$，$\dot{\varphi} = \psi = 0$.

由于

$$
\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots\cdots,
$$

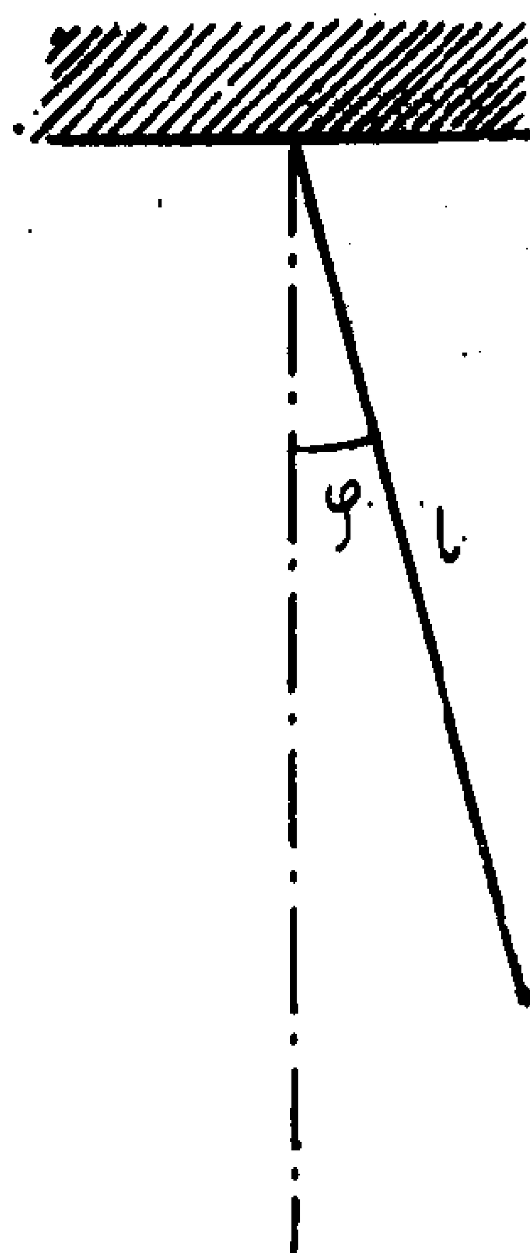


图 5.2

所以方程组 (5.3) 可写成形式

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi}{dt} = \psi \\
\dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{g}{l}\left(\varphi - \dfrac{\varphi^3}{3!} + \cdots\cdots\right).
\end{cases} \tag{5.4}
$$

取(5.4)的线性部分，得

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=\psi\\ \frac{d\psi}{dt}&=-\frac{g}{l}\varphi.\end{aligned}\tag{5.5}$$

线性方程组(5.5)称为非线性方程组(5.3)的“**一次近似**”．可以证明，在一定条件下，方程组(5.5)的解的性质与(5.3)的解的性质相同．

这一章就是来研究线性方程组的解的性质和解法．

含有几个未知函数的线性微分方程组的一般形状为

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\cdots\cdots+a_{1n}(x)y_n+f_1(x),\\ \dfrac{dy_2}{dx}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\cdots\cdots+a_{2n}(x)y_n+f_2(x),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\cdots\cdots+a_{nn}(x)y_n+f_n(x).\end{cases}\tag{5.6}$$

在实际问题中，在建立方程组(5.6)的同时，一般地还给出初始条件：

$$y_1(x_0)=y_1^0,\ y_2(x_0)=y_2^0,\ \cdots\cdots,\ y_n(x_0)=y_n^0,\tag{5.7}$$

要求方程(5.6)满足(5.7)的解，即初值问题的解．

将第三章§3.5的定理3.5应用于方程组(5.6)，可以得到如下的定理．

定理5.1 如果方程组(5.6)的系数$a_{ij}(x)(i,\ j=1,2,\cdots\cdots,\ n)$和函数$f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$在区间I：$a\leqslant x\leqslant b$上连续，则方程组(5.6)存在唯一满足(5.7)的解，且这个解在整个区间上有定义，这里x_0是I上任一点，而y_1^0，y_2^0，$\cdots\cdots y_n^0$是任意的实数．

以后我们总假设(5.6)中的系数$a_{ij}(x)$和函数$f_i(x)$在某区间I上连续，而不再每次都加以说明了．

为了简洁紧凑起见，往往把方程组(5.6)写成向量的形式．为此，引进方阵

$$A(x)=\begin{pmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots\cdots a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots\cdots a_{2n}(x)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots\cdots a_{nn}(x)\end{pmatrix}$$

及列向量

$$Y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\\ \vdots\\ y_n(x)\end{pmatrix},\qquad F(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix}.$$

我们还把列向量的导数规定如下．

定义5.1

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dy} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}.$$

这样，方程组(5.6)就可以写成向量形式

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y+F(x). \tag{5.6$'$}$$

而初始条件(5.7)可以写成

$$Y(x_0)=\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}=Y^{(0)}. \tag{5.7$'$}$$

如果所有 $f_i(x)\equiv 0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，即$F(x)\equiv 0$ （零向量），这时方程组（5.6）（即(5.6)$'$）变成

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y. \tag{5.8}$$

称为**线性齐次方程组**. 如果 $F(x)$ 不是零向量，则称（5.6）为**线性非齐次方程组**.

§5.2 线性齐次方程组的一般理论

先研究线性齐次方程组（5.8）的通解结构. 与n阶线性齐次微分方程式的情况类似，也有如下的定理.

定理5.1 如果

$$Y_1=\begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix},\quad \cdots\cdots,\quad Y_m=\begin{pmatrix} y_{1m}(x) \\ y_{2m}(x) \\ \vdots \\ y_{nm}(x) \end{pmatrix}$$

是方程组（5 8）的m个解，则

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots\cdots+C_mY_m \tag{5.9}$$

也是（5.8）的解，其中 C_1、C_2、……，C_m 是任意常数. 换句话说，线性齐次方程组（5.8）的任何有限个解的线性组合仍为（5.8）的解.

证明. 因为 $Y_i(i=1,2,\cdots\cdots,m)$是方程组（5.8）的解，即

$$\frac{dY_i}{dx}=A(x)Y_i\ (i=1、2、\cdots\cdots,m),$$

所以

$$\frac{d}{dx}[C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots\cdots+C_mY_m]$$

$$\equiv C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+\cdots\cdots+C_m\frac{dy_m}{dx}$$

$$\equiv C_1A(x)Y_1+C_2A(x)Y_2+\cdots\cdots C_mA(x)Y_m$$

$$\equiv A(x)[C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots\cdots+C_mY_m].$$

这说明（5.9）是方程（5.8）的解.

现在设有齐次方程组（5.8）的 n 个解 $Y_1(x)$，$Y_2(x),\cdots\cdots Y_n(x)$，那末在什么条件下，含有 n 个任意常数 C_1，$C_2,\cdots\cdots C_n$ 的解

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots\cdots+C_nY_n$$

才是齐次方程组（5.8）的通解呢？为了说明这个问题，我们先给出函数向量线性相关与线性无关的概念.

定义5.2 设

$$Y_1(x)_1,\ Y_2(x)_2,\cdots\cdots Y_m(x) \tag{5.10}$$

是 m 个定义在区间 I 上的 n 维函数向量. 如果存在 m 个不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots\cdots C_m$，使得

$$C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_mY_m(x)=0 \tag{5.11}$$

在区间 I 上恒成立，则称这 m 个向量(5.10)**在区间 I 上线性相关**；否则称（5.10）**在区间 I 上线性无关**.

我们指出，如果两个函数向量 Y_1 与 Y_2 的对应分量成比例，即有等式

$$\frac{y_{11}(x)}{y_{12}(x)}=\frac{y_{21}(x)}{y_{22}(x)}=\cdots\cdots=\frac{y_{n1}(x)}{y_{n2}(x)}=k,\ x\in I, \tag{5.12}$$

则它们在区间 I 上线性相关.

事实上，由（5.12）有恒等式

$$y_{11}(x)-ky_{12}(x)\equiv 0,\ y_{21}(x)-ky_{22}(x)\equiv 0,\ \cdots\cdots,$$
$$y_{n1}(x)-ky_{n2}(x)\equiv 0,$$

或

$$Y_1(x)-kY_2(x)\equiv 0,\qquad x\in I,$$

故由定义5.2，$Y_1(x)$ 和 $Y_2(x)$ 在 I 上线性相关（在此 $C_1=1$，$C_2=-k$）.

另外，如果在向量组（5.10）中有一零向量

$$Y_i(x)\equiv\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\equiv 0,\qquad x\in I,$$

则（5.10）在 I 上线性相关. 事实上，若取 $C_i\neq 0$，而其余的 $C_k=0$（$k\neq i$），则关系式（5.11）在区间 I 上恒成立，这就表明（5.10）在区间 I 上线性相关.

例1. 函数向量

$$Y_1(x)=\begin{pmatrix}e^{3x}\\e^{3x}\\e^{3x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3x},\quad y_2(x)=\begin{pmatrix}e^{6x}\\-2e^{6x}\\e^{6x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}e^{6x}$$

在（$-\infty$，$+\infty$）上线性无关．事实上，要使得

$$C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)\equiv 0,\qquad x\in(-\infty,\ +\infty)$$

成立，显然只能$C_1=C_2=0$．

例2. 函数向量

$$Y_1(x)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-2x},\quad Y_2(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-2x}$$

在（$-\infty$，$+\infty$）上线性无关．

事实上，由于

$$C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)\equiv 0,\quad x\in(-\infty,\ +\infty),$$

相当于纯量形式

$$\begin{cases}C_1e^{-2x}\equiv 0,\\ C_2e^{-2x}\equiv 0,\quad x\in(-\infty,\ +\infty),\\ -C_1e^{-2x}-C_2e^{-2x}\equiv 0,\end{cases}$$

由此，立即可看出：仅当$C_1=0$，$C_2=0$时，才能使上面三个恒等式同时成立，即所给向量组在（$-\infty$，$+\infty$）上线性无关．

但是，本例中的两个向量函数的各个对应的分量（它们是函数）却能构成线性相关函数组．这个例题说明，函数向量组的线性相关概念和它们的相应分量的线性相关概念并不等价．

下面介绍n个n维向量函数组

$$Y_1(x),\ Y_2(x),\ \cdots\cdots,\ Y_n(x)\tag{5.12}$$

在其定义区间I上线性相关与线性无关的判别准则．

我们考察由这些列向量所组成的行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_{11}(x) & y_{12}(x)\cdots\cdots y_{1n}(x)\\ y_{21}(x) & y_{22}(x)\cdots\cdots y_{2n}(x)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x)\cdots\cdots y_{nn}(x)\end{vmatrix},$$

通常把它称做向量组（5.12）的**朗斯基行列式，或简称朗斯基．**

和线性方程式类似，有如下的定理．

定理5.2 如果向量组（5.12）在区间I上线性相关，则它的朗斯基行列式$W(x)$在I上恒等于零．

证明． 依假设，存在不全为零的常数C_1，C_2，……．C_n，使得

$$C_1y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x)\equiv 0,\ x\in I.$$

若把上式写成纯量形式，则有

$$\begin{cases} C_1y_{11}(x)+C_2y_{12}(x)+\cdots\cdots+C_ny_{1n}(x)\equiv 0, \\ C_1y_{21}(x)+C_2y_{22}(x)+\cdots\cdots+C_ny_{2n}(x)\equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1y_{n1}(x)+C_2y_{n2}(x)+\cdots\cdots+C_ny_{nn}(x)\equiv 0. \end{cases} \quad x\in I$$

这是关于C_1，$C_2\cdots\cdots$，C_n的线性齐次代数方程组，且它对任一$x\in I$，都有非零解C_1 $C_2\cdots\cdots C_n$（由于C_1，$C_2\cdots\cdots$，C_n不同时为零），根据线性代数知识，它的系数行列式$W(x)$对任一x都为零．故在I上恒有$W(x)\equiv 0$．证毕．

定理5.3 如果$Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$是方程组（5.3）的n个线性无关解，则它的朗斯基行列式$W(x)$在I上恒不为零．

证明（反证法）．如果有$x_0\in I$，使得$W(x_0)=0$．我们可求出不全为零的常数C_1，C_2，……，C_n，满足线性齐次方程组

$$\begin{cases} C_1y_{11}(x_0)+C_2y_{12}(x_0)+\cdots\cdots+C_ny_{1n}(x_0)=0, \\ C_1y_{21}(x_0)+C_2y_{22}(x_0)+\cdots\cdots+C_ny_{2n}(x_0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ C_1y_{n1}(x_0)+C_2y_{n2}(x_0)+\cdots\cdots+C_ny_{nn}(x_0)=0. \end{cases} \tag{5.13}$$

由于系数行列式$W(x_0)=0$，所以这样的C_1，C_2，……C_n肯定存在．设

$$Y(x)=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x), \tag{5.14}$$

由定理5.1可知$Y(x)$是方程组（5.8）的解．（5.13）表明$Y(x_0)$是零向量．换句话说，$Y(x)$是齐次方程组（5.8）满足$Y(x_0)=0$的解．由于齐次方程组（5.8）有零解

$$y_1\equiv 0,\ y_2\equiv 0,\ \cdots\cdots,\ y_n\equiv 0,$$

显然，当$x=x_0$时，这一零解也满足初始条件$Y(x_0)=0$．因此，根据唯一性定理有$Y(x)\equiv 0$，$x\in I$．这样，由（5.14）有恒等式

$$C_1Y_1(x)C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x)\equiv 0,\ x\in I,$$

其中C_i不全为零，从而$Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$在I上线性相关，矛盾．证毕．

由定理5.2．和定理5.3立即得到如下的推论．

推论1． 如果向量组（5.12）的朗斯基$W(x)$在区间I上的某一点x_0处不等于零，$W(x_0)\neq 0$，则向量组（5.12）在I上就线性无关．

实际上，如若不然，（5.12）在I上线性相关，则依定理5.2在I上必有$W(x)\equiv 0$，这与$W(x_0)\neq 0$相矛盾，故在I上（5.12）线性无关．

推论2． 如果方程组（5.8）的n个解的朗斯基$W(x)$在其定义的区间I某一点x_0等于零，$W(x_0)$则该解组在I上必线性相关．

实际上，如若不然，若解组在I上线性无关，则由定理5.3，它的朗斯基在I上恒不为零，这与$W(x_0)=0$矛盾，故已知解组在I上线性相关．

推论3． 方程组（5.8）的n个解在其定义区间I上线性无关的充要条件是它们的朗斯基$W(x)$在I上某一点处不为零．

条件的充分性由推论1立即可以得到．

用反证法来证明条件的必要性．如果$W(x)=0$在I上恒成立，则根据定理5.2，该解组必线性相关．因而存在$x_0\in I$，使得$W(x_0)\neq 0$．证毕．

我们把齐次方程组（5.8）的 n 个线性无关解称为该方程组的**基本解组**.

定理5.4. 齐次方程组（5.8）必存在基本解组.

证明. 只要能找到（5.8）的朗斯基不等于零的 n 个解就可以了. 实际上，由存在唯一性定理可知，齐次方程组（5.8）必存在满足初始条件

$$Y_1(x_0)=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad Y_2(x_0)=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots\cdots,\quad Y_n(x_0)=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},\quad x_0\in I. \tag{5.15}$$

的 n 个解 $Y_1(x)$，$Y_2(x),\cdots,Y_n(x)$. 由于它们所构成的朗斯基行列式 $W(x)$ 在 $x=x_0$ 处等于

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

因而，由前面的推论 2 知，$Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$是基本解组.

满足初始条件（5.15）的基本解组称为方程组（5.8）的**标准的基本解组**. 因为使 $W(x_0)\neq 0$ 的数值$y_{ij}(x_0)$（i，j，$=1,2,\cdots\cdots$，n）取法有无穷多种，所以由上面定理的证明可知，齐次方程组（5.8）也就有无穷多个基本解组. 和线性方程式类似，也有在如下的所谓基本定理.

定理5.5. 如果 $Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$是齐次方程组（5.3）的基本解组，则其线性组合

$$C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x) \tag{5.16}$$

是方程组（5.8）的通解.

证明. 为此，我们需要证明如下两点.

首先，不论 C_1，C_2，……，C_n 是什么常数，向量（5.16）是齐次方程组（5.8）的解，这一点已在定理5.1得到证明. 其次，我们来证明：对于满足任给初始条件(5.7)（或(5.7)′）的齐次方程组（5.8）的解 $Y(x)$，皆可找到 C_1，C_2，……，C_n 使得

$$Y(x)=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x) \tag{5.17}$$

为此，我们只要证明，可以找到这样的 C_1，C_2，……，C_n，使得解（5.16）满足初始条件（5.7），即

$$Y(x_0)=C_1Y_1(x_0)+C_2Y_2(x_0)+\cdots\cdots+C_nY_n(x_0)=Y^{(0)}. \tag{5.18}$$

现把上面向量等式写成纯量形式：

$$\begin{cases}C_1y_{11}(x_0)+C_2y_{12}(x_0)+\cdots\cdots+C_ny_{1n}(x_0)=y_1^{(0)},\\C_1y_{21}(x_0)+C_2y_{22}(x_0)+\cdots\cdots+C_ny_{2n}(x_0)=y_2^{(0)},\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\C_1y_{n1}(x_0)+C_2y_{n2}(x_0)+\cdots\cdots+C_ny_{nn}(x_0)=y_n^{(0)},\end{cases} \tag{5.19}$$

这是一个线性非齐次代数方程组，它的系数行列式恰是线性无关解 $Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)$ 在 $x=x_0$ 处的值，由定理 5.3 知 $W(x_0)\neq 0$，从

而方程组（5.19）有解 C_1，C_2，……，C_n. 换局话说，确有 C_1，C_2，……，C_n 使（5.18）成立. 这就说明齐次方程组（5.8）的解 $Y(x)$ 和解（5.16）在 $x=x_0$ 处满足相同的初始条件，由唯一定理知这两个解在区间 I 上恒等，即恒等式（5.17）成立. 定理证毕.

推论4. 线性齐次方程组（5.8）的线性无关解的个数不能多于 n 个.

实际上，设 $Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$，$Y_{n+1}(x)$ 是方程组（5.8）的任意 $n+1$ 个解. 现任取其中 n 个解，比如取前 n 个解 $Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$. 这样，或者这 n 个解线性相关，这时 $n+1$ 个解当然也线性相关，或者这 n 个解线性无关，从而构成方程组（5.8）的基本解组，这时由定理5.5知，存在 C_1，C_2，……，C_n 使得

$$Y_{n+1}(x)\equiv C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x),$$

这说明这 $n+1$ 个解还是线性相关的.

由此可见，考虑到本节开始时所介绍的方程组(5.3)解的性质以及上述推论的内容，我们证明了齐次方程组（5.8）的解的全体构成一个 **n 维线性空间.**

和 n 阶线性方程式一样，齐次方程组（5.8）的解和方程组（5.8）的系数之间有着密切联系. 这一联系也由所谓刘维尔公式表达.

定理5.6. 如果 $Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$ 是齐次方程组（5.8）的 n 个解向量，则这 n 个解向量的朗斯基行列式与方程组（5.8）的系数有如下关系式

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]dt}, \tag{5.20}$$

这关系式称为**刘维尔公式.**

证明. 由行列式微分法则，有

$$\frac{dW(x)}{dx}=\begin{vmatrix} \frac{dy_{11}(x)}{dx} & \frac{dy_{12}(x)}{dx} & \cdots\cdots & \frac{dy_{1n}(x)}{dx} \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots\cdots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots\cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots\cdots & y_{1n}(x) \\ \frac{dy_{21}(x)}{dx} & \frac{dy_{22}(x)}{dx} & \cdots\cdots & \frac{dy_{2n}(x)}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots\cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}+$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$+\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots\cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots\cdots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy_{n1}(x)}{dx} & \frac{dy_{n2}(x)}{dx} & \cdots\cdots & \frac{dy_{nn}(x)}{dx} \end{vmatrix}. \tag{5.21}$$

由于 $Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$ 都是齐次方程组（5.8）的解向量，所以有

$$\frac{dy_{ik}}{dx}=a_{i1}(x)y_{1k}+a_{i2}(x)y_{2k}+\cdots\cdots+a_{in}(x)y_{nk}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_{jk}\qquad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n).$$

把上面这些等式代入（5.21）的右边，然后将每一个行列式进行化简．比如，对第一个行列式可按下列方式化简：

$$\begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(x)y_{j1} & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}(x)y_{j2} & \cdots\cdots\cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}(x)y_{jn}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots\cdots\cdots & y_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots\cdots\cdots & y_{nn}\end{vmatrix},$$

从第二行至第 n 行分别乘以 $-a_{12}(x),-a_{13}(x),\cdots\cdots,-a_{1n}(x)$，然后都和第一行相加，则得到

$$\begin{vmatrix}a_{11}(x)y_{11} & a_{11}(x)y_{12} & \cdots\cdots & a_{11}(x)y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots\cdots & y_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots\cdots & y_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(x)W(x).$$

其它的每一行列式都作类似的化简，最后（5.21）式可化简成

$$\frac{dW(x)}{dx}=[a_{11}(x)+a_{22}(x)+\cdots\cdots+a_{nn}(x)]W(x),$$

即有

$$\frac{dW(x)}{dx}-\left[\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(x)\right]W(x)\equiv 0,$$

从而

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(t)\,dt}W(x)\right]\equiv 0,$$

所以有

$$e^{-\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(t)\,dt}\cdot W(x)\equiv W(x_0),$$

最后，可推得刘维尔公式

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(t)\,dt}.$$

在代数中，常把 $\sum_{k=1}^{n}a_{kk}$ 称为方阵 A 的迹，记为 t_rA，因此刘维尔公式也可表为

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}t_rA(t)\,dt}.$$

从公式（5.20）明显地看出，齐次方程组（5.8）的 n 个解所构成的朗斯基行列式 $W(x)$ 或者恒为零，或者恒不为零.

习　　题 5.1

1. 将下列方程式（组）化成一阶方程组：

1）$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$，

2）$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+c\dfrac{dx}{dt}+kx=f(x)$；

3）$y'''+a_1(x)y''+a_1y'+a_3(x)y=0$，

4）$\begin{cases}\dfrac{d^2y_1}{dx^2}=a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3,\\ \dfrac{d^2y_2}{dx^2}=a_1y_1+b_2y_2+c_2y_3,\\ \dfrac{d^2y_3}{dx^2}=a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3.\end{cases}$

2. 求解下列方程组：

1）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda_1x,\\ \dfrac{dy}{dt}=\lambda_2y.\end{cases}$　　2）$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=-r(r^2-1),\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1.\end{cases}$

3）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda x,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda y.\end{cases}$

3. 试证线性非齐次方程组（5.6）满足初始条件 $Y(x_0)=Y^{(0)}$ 解的唯一性等价于齐次方程（5.8）满足初始条件 $Y(x_0)=0$ 的零解的唯一性.

§5.3　线性非齐次方程组

本节研究线性非齐次方程组

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y+F(x) \tag{5.6$'$}$$

的通解的结构.

结论与线性方程相似，证明方法也相同.

定理5.7　如果 $\widetilde{Y}(x)$ 是线性非齐次方程组（5,6）′的解，而 $Y_1(x)$ 是其对应齐次方程组

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y \tag{5.8}$$

的解，则 $Y_1(x)+\widetilde{Y}(x)$ 是非齐次方程组（5.6）′的解.

证明. 这只要直接代入验证即可. 事实上，根据假设有

$$\frac{d\widetilde{Y}(x)}{dx} \equiv A(x)\widetilde{Y}(x)+F,\quad \frac{dY_1(x)}{dx} \equiv A(x)Y_1(x),$$

所以有

$$\frac{d}{dx}[Y_1(x)+\widetilde{Y}(x)] \equiv \frac{dY_1(x)}{dx}+\frac{d\widetilde{Y}(x)}{dx} \equiv$$

$$\equiv A(x)Y_1(x)+A(x)\widetilde{Y}(x)+F(x)$$

$$\equiv A(x)[Y_1(x)+\widetilde{Y}(x)]+F(x),$$

上式左右两端恒等，即 $Y_1(x)+\widetilde{Y}(x)$ 是方程组（5.6）′的解.

定理5.8. 线性非齐次方程组（5.6）′的任意两个解之差是其对应齐次方程组(5.8)的解.

证明. 设 $Y(x)$ 和 $\widetilde{Y}(x)$ 是非齐次方程组（5.6）′的任意两个解，即

$$\frac{dY}{dx} \equiv A(x)Y(x)+F,\quad \frac{d\widetilde{Y}}{dx} \equiv A(x)\widetilde{Y}(x)+F,$$

现要证 $Y(x)-\widetilde{Y}(x)$ 是齐次方程组（5.8）的解. 这只要直接检验即可. 事实上，我们有

$$\frac{d}{dx}[Y(x)-\widetilde{Y}(x)] \equiv \frac{dY(x)}{dx}-\frac{d\widetilde{Y}(x)}{dx}$$

$$\equiv A(x)Y(x)+F(x)-A(x)\widetilde{Y}(x)-F(x)$$

$$\equiv A(x)[Y(x)-\widetilde{Y}(x)].$$

上式即说明 $Y(x)-\widetilde{Y}(x)$ 是方程组（5.8）的解.

定理5.9. 线性非齐次方程组（5.6）′[即(5.6)]的通解等于其对应的齐次方程组（5.8）的通解与方程组（5.6）′的一个特解之和. 即若 $\widetilde{Y}(x)$ 是非齐次方程组（5.6）′的一个特解，$Y_1(x)$，$Y_2(x)$，……，$Y_n(x)$ 是齐次方程组（5.8）的 n 个线性无关解，则

$$Y(x)=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x)+\widetilde{Y}(x) \tag{5.22}$$

便是非齐次方程组（5.6）′的通解.

证明. 首先根据定理5.7，，不论 C_1，C_2，……，C_n 是什么常数，（5.22）都是非齐次方程组的(5.6)′的解. 其次，对于方程组（5.6）′的任何一个解 $Y(x)$，由定理5.8知，$Y(x)-\widetilde{Y}(x)$ 是齐次方程组(5.8)的解. 由于 $C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x)$ 是齐次方程组（5.8）的通解，故可适当选取 $C_1,\cdots\cdots,C_n$，使得 $Y(x)-\widetilde{Y}(x)=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots\cdots+C_nY_n(x)$，即有（5.22）式成立. 于是方程组（5.6）′任何一个解 $Y(x)$ 都包含在（5.22）之中，故（5.22）是通解. 定理证毕.

根据上面的定理可知，当方程组（5.6）′对应的齐次方程组（5.8）的通解已知时，只要知道方程组（5.6）′的一个特解，就可求得方程组（5.6）′的通解. 但在此时我们可

利用常数变易法求得方程组（5.6）′的一个特解.

拉格朗日常数变易法. 设 $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ……, $Y_n(x)$ 是齐次方程组（5.8）的一个基本解组. 现在试求方程组（5.6）′的形如

$$\tilde{Y}(x)=C_1(x)Y_1(x)+C_2(x)Y_2(x)+\cdots\cdots+C_n(x)Y_n(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)Y_i(x) \tag{5.23}$$

的解，其中 $C_1(x)$, $C_2(x)$, ……, $C_n(x)$ 是未知函数. 将（5.23）代入非齐次方程组（5.6）′，得：

$$\sum_{i=1}^{n}C'_i(x)Y_j(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)\frac{dY_i}{dx}$$
$$\equiv A(x)\sum_{i=1}^{n}C_i(x)Y_i(x)+F(x),$$

因为 $\frac{dY_i(x)}{dx}\equiv A(x)Y_i(x)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，所以上式左边第二项与上式右边第一项相等，从而我们得到：

$$C'_1(x)Y_1(x)+C'_2(x)Y_2+\cdots\cdots+C'_n(x)Y_n(x)=F(x),$$

或者把它写成纯量形式

$$\begin{cases} C'_1(x)y_{11}(x)+C'_2(x)y_{12}(x)+\cdots\cdots+C'_n(x)y_{1n}(x)=f_1(x), \\ C'_1(x)y_{21}(x)+C'_2(x)y_{22}(x)+\cdots\cdots+C'_n(x)y_{2n}(x)=f_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C'_1(x)y_{n1}(x)+C'_1(x)y_{n2}(x)+\cdots\cdots+C'_n(x)y_{nn}(x)=f_n(x). \end{cases} \tag{5.24}$$

这是个含有 n 个未知函数 $C'_i(x)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 的 n 个方程的方程组，其系数行列式恰是方程组（5.8）的基本解组 $Y_1(x), Y_2(x), \cdots\cdots Y_n(x)$ 所组成的朗斯基行列式 $W(x)$，因而 $W(x)\neq 0$.所以由方程组（5.24）可以解出 $C'_i(x)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

$$C'_i(x)=\varphi_i(x) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n),$$

积分之，就得到

$$C_i(x)=\int\varphi_i(x)dx+C_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots n).$$

把它们代入（5.23），就得到非齐次方程组（5.6）′的通解.

§5.4 常系数线性微分方程组

由定理5.5以及拉格朗日常数变易法知道，为了求线性齐次方程组（5.8）和线性非齐次方程组（5.6）的通解，只要能求到方程组（5.8）的一个基本解组就可以了.

对于常系数线性齐次方程组

$$\frac{dY}{dx}=AY, \tag{5.25}$$

其中 A 是 n 阶常数矩阵，总可以做到这一点，并且，和常系数线性方程式类似，寻求

它的基本解组可以归结为代数运算．

为了求解常系数线性方程组，首先必须弄清楚方程组（5.25）的基本解组的构造．为此，先将方程组

$$\frac{dY}{dx}=AY \tag{5.25}$$

进行简化．由线性代数知识知，存在非奇异线性变换

$$Y=TZ, \tag{5.26}$$

其中 $T=\{t_{ij}\}(i\cdot i=1,2,\cdots,n),\det T\neq 0$，将方程组（5.26）变成方程组

$$\frac{dZ}{dx}=T^{-1}ATZ, \tag{5.27}$$

其中 $T^{-1}AT$ 是约当(*Jordan*)标准型．

下面分两种情况讨论．

1°矩阵 A 的特征根均是单根：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\lambda_n$，这时

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

方程组（5.25）变为

$$\begin{pmatrix}\frac{dz_1}{dx}\\ \frac{dz_2}{dx}\\ \vdots\\ \frac{dz_n}{dx}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0\\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}.$$

写成纯量形式，可得方程组

$$\frac{dz_1}{dx}=\lambda_1 z_1,\quad \frac{dz_2}{dx}=\lambda_2 z_2,\quad \cdots\cdots,\quad \frac{dz_n}{dx}=\lambda_n z_n. \tag{5.28}$$

积分方程组（5.28）便可得到（5.27）的解

$$z_1=c_1e^{\lambda_1 x},\ z_2=c_2e^{\lambda_1 x},\cdots\cdots,z_n=c_ne^{\lambda_n x}, \tag{5.29}$$

其中，c_1，c_2，$\cdots\cdots$，c_n 是任意常数．

依次令：

$$c_1=1.\ c_2=c_3=\cdots\cdots=c_n=0.$$
$$c_1=0\quad c_2=1,\ c_3=c_4=\cdots\cdots=c_n=0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1=c_2=\cdots\cdots=c_{n-1}=0,\ c_n=1.$$

可得方程组（5.27）的 n 个解：

$z_1(x)$：　$e^{\lambda_1 x}$，0，$\cdots\cdots$，0，

$z_2(x)$：　0，$e^{\lambda_2 x}$，$\cdots\cdots$，0，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$z_n(x)$: 0, 0, ……, $e^{\lambda_n x}$.

将上述n个解代入式 (5.26), 得 (5.25)的n个解: 例如,

$$Y_1(x)=\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} z_1(x)=\begin{pmatrix} t_{11}e^{\lambda_1 x} \\ t_{21}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ t_{n1}e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix},$$

即

$Y_1(x)$: $t_{11}e^{\lambda_1 x}$, $t_{21}e^{\lambda_1 x}$, ……, $t_{n1}e^{\lambda_1 x}$,

同理可得

$Y_2(x)$: $t_{12}e^{\lambda_2 x}$, $t_{22}e^{\lambda_2 x}$, ……, $t_{n2}e^{\lambda_2 x}$,

……………………………………………………

$Y_n(x)$: $t_{1n}e^{\lambda_n x}$, $t_{2n}e^{\lambda_n x}$, ……, $t_{nn}e^{\lambda_n x}$,

由于上述 n 个解在 $x=0$ 处的朗斯基恰是变换矩阵 T 的行列式 $detT$ (依假设不为零):

$$W(0)=\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

故这n个解在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关, 因而构成方程组 (5.25) 的基本解组.

在实际求解常系数线性方程时, 将系数矩阵A化为约当标准型的方法是困难的, 因为求变换矩阵 T 相当复杂. 常常采用的方法是待定系数法. 即先将 (5.30) 作为形式解代入 (5.25), 比较两端系数, 定出$t_{ij}(i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$, 再将所求值代回解(5.30)中即可.

例1. 试求方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-y+z, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+5y-z, \\ \dfrac{dz}{dt}=x-y+3z. \end{cases}$$

的通解.

解 它的系数矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

它的特征方程是

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

或

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 .$$

所以矩阵 A 的特征根 $\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 6$.

先求特征根 $\lambda_1 = 2$ 所对应的解. 依 (5.30) 它的解具形式

$$x_1 = ae^{2t},\ y_1 = be^{2t},\ z_1 = ce^{2t}.$$

将上述解代入原方程组，消去 e^{2t} 后得

$$2a = 3a - b + c,\ 2b = -a + b - c,\ 2c = a - b + 3c,$$

或

$$a - b + c = 0,\ a + b + c = 0,\ a - b + c = 0 .$$

在上述方程中，实际上只有前两个方程是独立的，解之可得

$$a = -c,\quad b = 0 .$$

取它的一组非零解（若取零解，便得到(5.25)的零解，这显然不是我们所需要的），例如，令 $a = 1$，于是可得：

$$a = 1,\ b = 0,\ c = -1.$$

这时已知方程组对应于特征根 $\lambda_1 = 2$ 的特解为

$$x_1 = e^{2t},\ y_1 = 0,\ z_1 = -e^{2t}.$$

用类似方法，同样可得对应于特征根 $\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 6$ 的特解，它们分别为，

$$x_2 = e^{3t},\ y_2 = e^{3t},\ z_2 = e^{3t},$$

与

$$x_3 = e^{6t},\ y_3 = -2e^{6t},\ z_3 = e^{6t}.$$

因而所求通解（上述三个特解的线性组合）为：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix} .$$

写成纯量形式，可得

$$x(x) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t},$$
$$y(t) = c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{6t}.$$
$$z(t) = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t}.$$

应当指出，矩阵 A 的特征根可能是复根，这时方程组 (5.25) 就会出现实变数复值解. 可是，我们通常希望求出方程组 (5.25) 的 n 个实的线性无关解. 这可由下述方法实现.

定理5.10. 如果实系数线性齐次方程组

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y \tag{5.8}$$

有复值解 $Y(x) = U(x) + iV(x)$，则其实部和虚部

$$U(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\u_2(x)\\\vdots\\u_n(x)\end{pmatrix},\quad V(x)=\begin{pmatrix}v_1(x)\\v_2(x)\\\vdots\\v_n(x)\end{pmatrix}$$

都是齐次方程组(5.8) 的解.

证明. 因为 $Y(x)=U(x)+iV(x)$是方程组 (5.8)的解，所以

$$\frac{d[U(x)+iV(x)]}{dx}\equiv\frac{dU(x)}{dx}+i\frac{dV(x)}{dx}\equiv$$

$$\equiv A(x)[U(x)+iV(x)]\equiv A(x)U(x)+iA(x)V(x).$$

由于二个复数表达式恒等相当于实部及虚部恒等，所以上述恒等式表明：

$$\frac{dU(x)}{dx}\equiv A(x)U(x),\quad \frac{dV(x)}{dx}\equiv A(x)V(x).$$

即 $U(x)$, $V(x)$是方程组(5.8) 的解. 证毕.

矩阵 A 的复特征根一定共轭成对地出现. 即，如果 $\lambda=a+ib$ 是特征根，则其共轭复数 $\lambda=a-ib$ 也是特征根. 这时，方程组 (5.25) 对应于 λ 的复解的形式是

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=e^{(a+ib)x}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}=e^{(a+ib)x}\begin{pmatrix}r_{11}+ir_{12}\\r_{21}+ir_{22}\\\vdots\\r_{n1}+ir_{n2}\end{pmatrix}.$$

或把它写成实部与虚部分离的形状：

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=e^{ax}\begin{pmatrix}r_{11}\cos bx-r_{12}\sin bx\\r_{21}\cos bx-r_{22}\sin bx\\\vdots\\r_{n1}\cos bx-r_{n2}\sin bx\end{pmatrix}+ie^{ax}\begin{pmatrix}r_{12}\cos bx+r_{11}\sin bx\\r_{22}\cos bx+r_{21}\sin bx\\\vdots\\r_{n2}\cos bx+r_{n1}\sin bx\end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

根据定理5.10，(5.31)的实部与虚部也是方程组(5.25)的解. 我们注意到，由于矩阵 A 是实的，所以上述共轭向量也就是方程组(5.25)对应特征根 $\lambda=a-ib$ 的解. 由此可见，特征根$\lambda=a-ib$ 所对应的解,其实部与虚部和$\lambda=a+ib$ 所对应的解(5.31)的实部及虚部全同，因而，$\lambda=a-ib$ 并不能确定出 (5.25) 新的实的特解.

这样，如果在基本解组中有复值解，一定共轭成对出现，那么这一对共轭复值解可用形如 (5.13) 的实部与虚部那样的实解来代替，最后得n个解仍组成基本解组.

例2. 求方程组

$$\frac{dx}{dt}=x-y-z,\quad \frac{dy}{dt}=x+y,\quad \frac{dz}{dt}=3x+y$$

的通解.

解 它的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}.$$

它的特征方程是

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

或

$$(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)=0,$$

所以特征根为：

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_{2,3}=1\pm 2i .$$

首先求 $\lambda_1=1$ 所对应的解：

$$x_1=ae^t, \ y_1=be^t, \ z_1=ce^t,$$

其中 a，b，c 为待定常数.

将上述解代入原方程组并消去 e^t，得

$$a=a-b-c, \ b=a+b, \ c=3a+c .$$

解之可得

$$a=0 \qquad b=-c.$$

取它的一个非零解，例如，令 $b=1$，得

$$a=0, \ b=1, \ c=-1.$$

于是已知方程组对应于 $\lambda_1=1$ 的特解为：

$$x_1=0, \ y_1=e^t, \ z_1=-e^t.$$

其次，我们来求特征根 $\lambda_2=1+2i$ 所对应的特解，它的形状如下：

$$x_2=ae^{(1+2i)t}, \ y_2=be^{(1+2i)t}, \ z_2=ce^{(1+2i)t}.$$

将上述函数视作形式解代入原方程，

得

$$a(1+2i)=a-b-c,$$
$$b(1+2i)=a+b,$$
$$c(1+2i)=3a+c.$$

或

$$-2ai-b-c=0, \ a-2bi=0, \ 3a-2ci=0 .$$

用 $2i$ 乘上述第一个方程两端，得

$$4a-2bi-2ci=0, \ a-2bi=0, \ 3a-2ci=0 .$$

显见，第一个方程等于第二与第三个方程之和. 故在上述方程组中仅有两个方程是独立的：

$$a-2bi=0, \quad 3a-2ci=0 .$$

求它的一个非零解，不妨令 $a=2i$，则 $b=1$，$c=3$. 于是已知方程组特征根 $\lambda_2=1+2i$ 所对应的特解为.

$$x_2^*=2ei^{(1+2i)}, \ y_2^*=e^{(1+2i)t}, \ z_2^*=3e^{(1+2i)t}.$$

由于

$$x_2^*=2ie^{(1+2i)t}=2ie^t(\cos 2t+i\sin 2t)=(-2\sin 2t+2i\cos 2t)e^t.$$

$$y_2^*=e^t(\cos 2t+i\sin 2t),$$

$$z_2^* = 3e^{(1+2i)} = 3e^t(\cos 2t + i\sin 2t),$$

故特征根 $\lambda_{2,3} = (1 \pm 2i)$ 所对应的实解为：

$$x_2 = -2e^t\sin 2t,\quad y_2 = e^t\cos 2t,\quad z_2 = 3e^t\cos 2t,$$

与

$$x_3 = 2e^t\cos 2t,\quad y_3 = e^t\sin 2t,\quad z_3 = 3e^t\sin 2t,$$

最后可得已知方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + c_3e^t\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix},$$

或

$$x(t) = (-2c_2\sin 2t + 2c_3\cos 2t)e^t,$$
$$y(t) = (c_1 + c_2\cos 2t + c_3\sin 2t)e^t,$$
$$z(t) = (-c_1 + 3c_2\cos 2t + 3c_3\sin 2t)e^t,$$

其中 c_1，c_2，c_3 是任意常数.

习　　题 5.2

1．求解下列方程组：

1）$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$　　2）$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 5y + 4z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 5z. \end{cases}$

3）$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha y. \end{cases}$

2．求解下列方程组：

1）$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$　　2）$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

3）$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$　　4）$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$

3．设有时滞方程组

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t-\tau) + by(t-\tau), \\ \dot{y}(t) = cx(t-\tau) + dy(t-\tau). \end{cases}$$

其中 a, b, c, d, τ 是实常数，若方程组有形如 $e^{\lambda t}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ 的解，待定常数 λ 和向量 $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ 应满足什么条件？

4. 求解下列方程组：

1）$\begin{cases}2\dot{x}-5 =4y-x,\\ 3\dot{x}-4 =2x-y.\end{cases}$　　2）$\begin{cases}\dot{x}=2y,\\ \dot{y}=-2x.\end{cases}$

2°. 特征根中有重根的情形

如果在方程组（5.25）中有重根时，用上述方法将得不到已知方程组的n个线性无关解．因为，这时所得到的解可能不足n个．为了求得方程组（5.25）的基本解组，和单根情况完全类似，还是应用变换（5.26）将方程组（5.25）化成

$$\frac{dZ}{dx}=T^{-1}ATZ \tag{5.27}$$

其中$T^{-1}AT$是约当标准型，不过这时它的形状为

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m\end{pmatrix}.$$

其中未标出符号的部分均为零元素，而

$$A_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{pmatrix}\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

是k_i阶的约当块，$k_1+k_2+\cdots\cdots+k_m=n$，$\lambda_1$，$\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_m$是（5.25）的特征根，它们当中可能有的彼此相等．

这时方程(5.25)可分解为m组独立的方程组．现将它们写成纯量形式．因为(5.25)相当于

$$\begin{pmatrix}\frac{dz_1}{dx}\\ \frac{dz_2}{dx}\\ \vdots\\ \frac{dz_{k_1}}{dx}\\ \vdots\\ \frac{dz_n}{dx}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1\end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix}\lambda_2 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2\end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix}\lambda_m & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_m & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m\end{matrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ \cdots\\ z_2\\ \vdots\\ z_{k_1}\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

故可得m个独立的方程组：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz_1}{dx}=\lambda_1 z_1+z_2,\cdots\cdots,\dfrac{dz_{k_1-1}}{dx}=\lambda_1 z_{k_1-1}+z_{k_1},\ \dfrac{dz_{k_1}}{dx}=\lambda_1 z_{k_1};\\
\dfrac{dz_{k_1+1}}{dx}=\lambda_2 z_{k_1+1}+z_{k_1+2},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{dz_{k_1+k_2-1}}{dx}=\lambda_2 z_{k_1+k_2-1}+z_{k_1+k_2},\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad,\dfrac{dz_{k_1+k_2}}{dx}=\lambda_2 z_{k_1+k_2};\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{dz_{n-km+1}}{dx}=\lambda_m z_{n-km+1}+z_{n-km}+2,\ \cdots\cdots,\ \dfrac{dz_n}{dx}=\lambda_m z_n.
\end{cases}
$$

下面按组分别求上述各组的解．先求第一组的解，为此，可首先积分第一组最后方程，得

$$z_{k_1}=c_{k_1}e^{\lambda_1 x},$$

其中 c_{k_1}是任意常数．将上式代入第一组的倒数第二个方程，得到

$$\frac{dz_{k_1-1}}{dx}=\lambda_1 z_{k_1-1}+c_{k_1}e^{\lambda_1 x}.$$

积分上述关于 z_{k_1-1} 的一阶线性非齐次方程，得

$$z_{k_1-1}=(c_{k_1-1}+c_{k_1}x)e^{\lambda_1 x}.$$

完全类似，依次可得

$$z_{k_1-2}=(c_{k_1-2}+c_{k_1-1}x+\frac{c_{k_1}}{2!}x^2)e^{\lambda_1 x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_1=(c_1+c_2x+\cdots+\frac{c_{k_1}}{(k_1-1)!}x^{k_1-1})\ e^{\lambda_1 x}.$$

对于其余的 $m-1$ 组解，作相同处理，最后可得到方程（5.32）或方程组（5.27）的全部解

$$
\begin{aligned}
&z_1=(c_1+c_2x+\cdots+\frac{c_{k_1}}{(k_1-1)!}x^{k_1-1})\ e^{\lambda_1 x},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&z_{k_1}=c_{k_1}e^{\lambda_1 x},\\
&z_{k_1+1}=(c_{k_1+1}+c_{k_1+2}x_1+\cdots+\frac{c_{k_1+k_2}}{(k_2-1)!}x k_2-1)e^{\lambda_2 x},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&z_n=c_n{}^{\lambda_m x}.
\end{aligned}
$$

其中 c_1，c_2，……，c_n 是任意常数．

下面我们就可以从方程组（5.32）或（5.27）的解求出方程组（5.25）的解来．

取 $c_1=1, c_2=c_3=\cdots\cdots=c_n=0$，得到（5.32）或（5.27）的一个解

$$z_{11}=e^{\lambda_1 x},\ z_{21}=0,\ \cdots\cdots,\ z_{n1}=0.$$

根据变换（5.26），可得（5.25）的一个解：

$$y_{11}=t_{11}e^{\lambda_1 x},\ y_{21}=t_{21}e^{\lambda_1 x},\cdots\cdots,y_{n1}=t_{n1}e^{\lambda_1 x}.$$

再令 $c_1=0$，$c_2=1$，$c_3=c_4=\cdots\cdots=c_n=0$，得（5.25）的一个解：

$$y_{12}=(t_{11}x+t_{12})e^{\lambda_1 x},\cdots\cdots,y_{n2}=(t_{n1}x+t_{n2})e^{\lambda_1 x}.$$

按上述类似的程序继续下去，最后可得（5.25）的 n 个解：

$$\begin{cases} Y_1(x):\ y_{11}=t_{11}e^{\lambda_1 x},\ y_{21}=t_{21}e^{\lambda_1 x},\cdots\cdots,y_{n1}=t_{n1}e^{\lambda_1 x}; \\ Y_2(x):\ y_{12}=(t_{11}x+t_{12})e^{\lambda_1 x},\cdots\cdots,y_{n2}=(t_{n1}x+t_{n2})e^{\lambda_1 x}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{k_1}(x):\ y_{1k_1}=\left(t_{11}\dfrac{x^{k_1-1}}{(k_1-1)!}+\cdots\cdots+t_{1k_1}\right)e^{\lambda_1 x},\cdots\cdots, \\ \qquad y_{nk_1}=\left(t_{n1}\dfrac{x^{k_1-1}}{(k_1-1)!}+\cdots\cdots+t_{nk_1}\right)e^{\lambda_1 x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n(x):\ y_{1n}=\left(t_{1\,n-k_m+1}\dfrac{x^{k_m-1}}{(k_m-1)!}+\cdots\cdots+t_{nk_1}\right)e^{\lambda_m x},\cdots\cdots, \\ \qquad y_{nn}=\left(t_{nn-k_m-1}\dfrac{x^{k_m-1}}{(k_m-1)!}+\cdots\cdots+t_{nn}\right)^{\lambda_m x}. \end{cases} \tag{5.33}$$

可以证明，如此得到的（5.25）的 n 个解是线性无关的，因而是（5.25）的基本解组．实际上．计算该解组在 $x=0$ 点的朗斯基行列式的值，得

$$W(0)=\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix}=detT$$

它是变换(5.26)的非奇异矩阵 T 的行列式，故 $detT\neq 0$，因而解组（5.33）线性无关．

综上所述，当（5.25）具重特征根时，其基本解组的构造如（5.33）．

为了求解方程（5.25），下面具体讨论一下，每一个重特征根所对应解的形状．

根据线性代数知识，λ_1 所对应的约当块可能不是一块而是几块，例如 l 块，不妨设它们的阶数分别为 k_1，k_2，$\cdots\cdots$，k_l，$k_1+k_2+\cdots+k_l=k$ 且 $k_i\leqslant k\ (i=1,2,\cdots\cdots,l)$．由上述讨论知，$\lambda_1$ 共对应 k 个解，且均具形式

$$y_{1i}=P_{1i}(x)e^{\lambda_1 x},\ y_{2i}=P_{2i}(x)e^{\lambda_1 x},\cdots\cdots,y_{ni}=P_{ni}(x)e^{\lambda_1 x} \quad (i=1,2,\cdots\cdots,k) \tag{5.34}$$

其中，$P_{ji}(x)$ 为次数不高于 $k-1$ 的多项式：

$$P_{ji}(x)=G_0+G_1x+\cdots\cdots+G_{k-1}x^{k-1}.$$

和单根时类似，为了求出（5.34）重特征根所对应的解，须将（5.34）作为形式解代入方程组(5.25)，用待定系数法确定出其系数．不过应当注意到，对应于一个 k 重特征根（例如 λ_1），应有 k 个形如（5.34）的解，因此这时应确定出 k 组系数．具体求法，通过下述例子予以说明．

例3. 求方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+z,\ \frac{dy}{dt}=x+y-z,\ \frac{dz}{dx}=y+z,\ \text{的通解.}$$

解 它的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

它的特征方程为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

或

$$-\lambda(1-\lambda)^2=0$$

特征根为$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=1$.

首先，用前面讨论过的方法易于求得$\lambda_1=0$对应的解

$$x_1=2,\ y_1=-1,\ z_1=1.$$

其次，求对应于二重特征根$\lambda_{2,3}=1$的解. 根据（5.34）式，它应具形状

$$x=(r_{11}+r_{12}t)e^t,\quad y=(r_{21}+r_{22}t)e^t,\quad z=(r_{31}+r_{32}t)e^t. \tag{5.35}$$

将它代入原方程组，消去e^t后得到

$$r_{11}+r_{12}t+r_{12}=r_{21}+r_{22}t+r_{31}+r_{22}t,$$
$$r_{21}+r_{22}t+r_{22}=r_{11}+r_{12}t+r_{21}+r_{22}t-r_{31}-r_{32}t$$
$$r_{31}+r_{32}t+r_{32}=r_{21}+r_{22}t+r_{31}+r_{32}t.$$

令t的同次幂系数相等，整理后可得

$$r_{12}-r_{22}-r_{32}=0,\quad r_{11}+r_{12}-r_{21}-r_{31}=0,$$
$$r_{32}-r_{12}=0,\quad r_{22}-r_{11}+r_{31}=0,$$
$$r_{22}=0,\quad r_{32}-r_{21}=0.$$

或

$$r_{22}=0,\ r_{32}=r_{12},\ r_{11}=r_{31},\ r_{32}=r_{21} \tag{5.36}$$

即，上述六个方程中仅有4个是独立的，因而，为求解上述方程组，可令其中两个未知数任意取值，且每取一组值，并由之所确定的函数组（5.35）均是已知方程组的解. 但由上述讨论知，由于已知方程组系数矩阵的特征根是二重的，这样的解仅能取两个，因而，解代数方程组（5.36）时，仅能对其中的两个未知数给出两组任意值. 另外，在给值时，还须注意，不能使（5.35）成为零解. 因为基本解组中不含有零解. 因而，为简单起见，可首先令$r_{11}=1$，$r_{12}=0$，这时，有

$$r_{22}=0,\ r_{32}=0,\ r_{21},\ r_{31}=0.$$

由此可得，已知方程组对应于二重特征根$\lambda_{2,3}=1$的一个特解

$$x_2=e^t,\ y_2=0,\ z_2=e^t.$$

其次，再令$r_{11}=0$，$r_{21}=1$，得

$$r_{22}=0,\ r_{31}=0,\ r_{32}=1,\ r_{12}=1.$$

由此得到$\lambda_{2,3}=1$所对应的另一个特解

$$x_3=te^t,\ y_3=e^t,\ z_3=te^t.$$

顺便指出，如此得到的已知方程组的三个解由于它们的朗斯基在$t=0$时

$$W(0)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0,$$

故它们是线性无关的．因而，已知方程组的通解为

$$\begin{cases} x(t)=2c_1+c_2e^t+c_3e^t, \\ y(t)=-c_1+c_2e^t, \\ z(t)=c_1+c_2e^t+c_3e^t. \end{cases}$$

习　　题 5.3

求解下列方程组：

1．$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3y. \end{cases}$

2．$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=2y_2, \\ \dfrac{dy_3}{dx}=3y_3. \end{cases}$

3．$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=2y_2+y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx}=2y_3. \end{cases}$

4．$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+y+z, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+z, \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y-z. \end{cases}$

在弄清楚常系数线性齐次方程组的基本解组的构造之后，我们指出它的一个重要性质．

由上述讨论知，当方程组（5.25）具有n个互异（实的或复的）特征根时，基本解组为（5.30）．因而，如果这些特征根均具负实部，则当$x\longrightarrow+\infty$时，它们均趋于零．由于它的通解是这n个解与常数的线性组合，故(5.25)的每一个解，当$x\longrightarrow+\infty$时，均趋于零，说的确切些，当$x\longrightarrow+\infty$时，均趋于它的零解：

$$y_1=0,\ y_2=0,\ \cdots\cdots,\ y_n=0$$

当方程（5.25)有重根时，只要它们均具负实部，上述结论仍然正确．实际上，这时，方程组的解无非是形如

$$P(x)e^{\lambda x}$$

的项的和，其中 $P(x)$ 为多项式，而 $\lambda=-p+iq$ 具有负实部 $-p<0$．因为

$$|P(x)e^{\lambda x}|\leqslant|P(x)|\,e^{-px}$$

及

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)e^{\lambda x}=0,$$

所以结论成立．

如果方程组（5.25）的特征根中（单根或复根）中即使有一个的实部为正，例如，$\lambda_k=p_k+iq_k$，$p_k>0$，则有的解就要包含当 $x\longrightarrow+\infty$ 时，趋于无穷的因子 $e^{p_k x}$，因而，不可能使得方程组（5.25）的所有解当 $x\longrightarrow+\infty$ 时，都趋于零解．

因而，综上所述，可得如下定理．

定理5.11. 如果方程(5.25)的特征根均具负实部，则它的所有解当 $x\longrightarrow+\infty$ 时，均趋于它的零解；如果（5.25）即使有一个具正实部的特征根，则不可能使得它的所有解当 $x\longrightarrow+\infty$ 时，均趋于它的零解．

在结束本节之前，我们来介绍一下常系数线性非齐次方程组

$$\frac{dY}{dx}=AY+F(x) \tag{5.36$'$}$$

通解的求法．

实际上，具体计算方法原则上已经解决了，因为（5.36）′对应的齐次方程组(5.25)的通解，可由前面讨论过的代数方法求得，而它的一个特解可由拉格朗日常数变易法得到．下面举例加以说明．

例5. 求方程

$$\frac{dx}{dt}=2x+3y+5t,\quad \frac{dy}{dt}=3x+2y+8e^{t} \tag{5.38}$$

的通解．

解 它的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix},$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&3\\3&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=0,$$

特征根是 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=-1$．

易于得到，（5.38）对应齐次方程组的两个线性无关的特解

$$x_1=e^{5t},\quad y_1=e^{5t};$$

$$x_2=e^{-t},\quad y_2=-e^{-t},$$

通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}e^{5t}\\e^{5t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{pmatrix}.$$

其次，根据拉格朗日常数变易法，求（5.38）的形如

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}=c_1(t)\begin{pmatrix}e^{5t}\\e^{5t}\end{pmatrix}+c_2(t)\begin{pmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{pmatrix} \tag{5.39}$$

的特解，其中 $c_1(x)$，$c_2(x)$ 为待定函数．

为此，将（5.39）作为形式解代入（5.38），得

$$c_1'(t)\begin{pmatrix}e^{5t}\\e^{5t}\end{pmatrix}+c_2'(t)\begin{pmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^t\\8e^t\end{pmatrix}.$$

它的纯量形式为

$$\begin{cases}c_1'(t)e^{5t}+c_2'(t)e^{-t}=5t,\\c_1'(t)e^{5t}-c_2'(t)e^{-t}=8e^t.\end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases}c_1'(x)=\dfrac{5}{2}te^{-5t}+4e^{-4t},\\c_2'(t)=\dfrac{5}{2}te^{t}-4e^{2t}.\end{cases}$$

积分之，得

$$\begin{cases}c_1(t)=(-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{10})e^{-5t}-e^{-4t}.\\c_2(t)=(\dfrac{5}{2}t-\dfrac{5}{2})e^{t}-2e^{2t}.\end{cases}$$

将上述解得的 $c_1(t)$，$c_2(t)$ 代入（5.39），即得方程组（5.38）的一个特解

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}=\left[(-\frac{1}{2}t-\frac{1}{10})e^{-5t}-e^{-4t}\right]\begin{pmatrix}e^{5t}\\e^{5t}\end{pmatrix}+\left[\frac{5}{2}(t-1)e^{t}-2e^{2t}\right]\begin{pmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{10}-e^{t}\\-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{10}-e^{t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{5}{2}(t-1)-2e^{t}\\-\dfrac{5}{2}(t-1)+2e^{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-\dfrac{13}{5}-3e^{t}\\-3t+\dfrac{12}{5}+e^{t}\end{pmatrix}.$$

所以，已知方程组的通解为

$$\begin{cases}x(t)=c_1e^{5t}+c_2e^{-t}+2t-\dfrac{13}{5}-3e^{t},\\y(t)=c_1e^{5t}-c_2e^{-t}-3t+\dfrac{12}{5}+e^{t}.\end{cases}$$

顺便指出，如同 n 阶线性方程一样，当方程组（5.36）′的非齐次项具有特殊形状时，也可以用待定系数法来求它的一个特解．例如，方程组（5.38）的非齐次项可以看成为．

$$F=\begin{pmatrix}5t\\8e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8e^t\end{pmatrix}=F_1+F_2.$$

这样，我们可分别求方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+F_1$$

的形如

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{y}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 t+b_1\\ a_2 t+b_2\end{pmatrix}$$

和方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+F_2$$

的形如

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_2\\ \tilde{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_3\\ b_3\end{pmatrix}e^t$$

的特解，其中$a_i,b_i(\ i=1,2,3)$都是待定系数．然后再根据叠加原理：

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{y}_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tilde{x}_2\\ \tilde{y}_2\end{pmatrix}$$

就是方程（5.38）的一个特解．读者自己不妨计算一下．

当 F 具有其它特殊形式时，就不再仔细介绍了．

习　　题 5.4

求解下列各非齐次方程组的通解：

1．$\begin{cases}\dot{x}=y+2e^t,\\ \dot{y}=x+t^2.\end{cases}$

2．$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-5\cos t,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y.\end{cases}$

3．$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y-x+1,\\ \dfrac{dy}{dt}=3y-2x.\end{cases}$

4．$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^t-1},\\ \dfrac{dy}{dt}=6x+3y-\dfrac{3}{e^t-1}.\end{cases}$

§5.5　应　用　举　例

常系数线性齐方程在许多技术问题上有着广泛的应用，只要在适当条件下，这些问题的一些本质属性均可用这类方程来描述．下面举几个这方面的例子．

例1　设有一个变压器，它由两个绕组构成：一次线圈和二次线圈，安放在同轴上．一次线圈具有自感 L_1，电阻 R_1，且与交变电源 $U(t)=U_m\sin\omega t$ 相连接．二次线圈具有自感 L_2，电阻 R_2，它与负载 R 相连接．两绕组间有互感 M(图5.3)，试研究其电流变化规律．

解 设两个迴路的电流分别为 $i_1(t)$，$i_2(t)$，并且电流方向如图所示．注意到由互感产生的电压降，在第一个迴路为 $M\frac{di_2}{dt}$，在第二迴路中为 $M\frac{di_1}{dt}$，依基尔霍夫定律，i_1，i_2 应满足方程组

$$\begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}-U(t)=0, \\ L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+Ri_2+M\frac{di_1}{dt}=0. \end{cases}$$

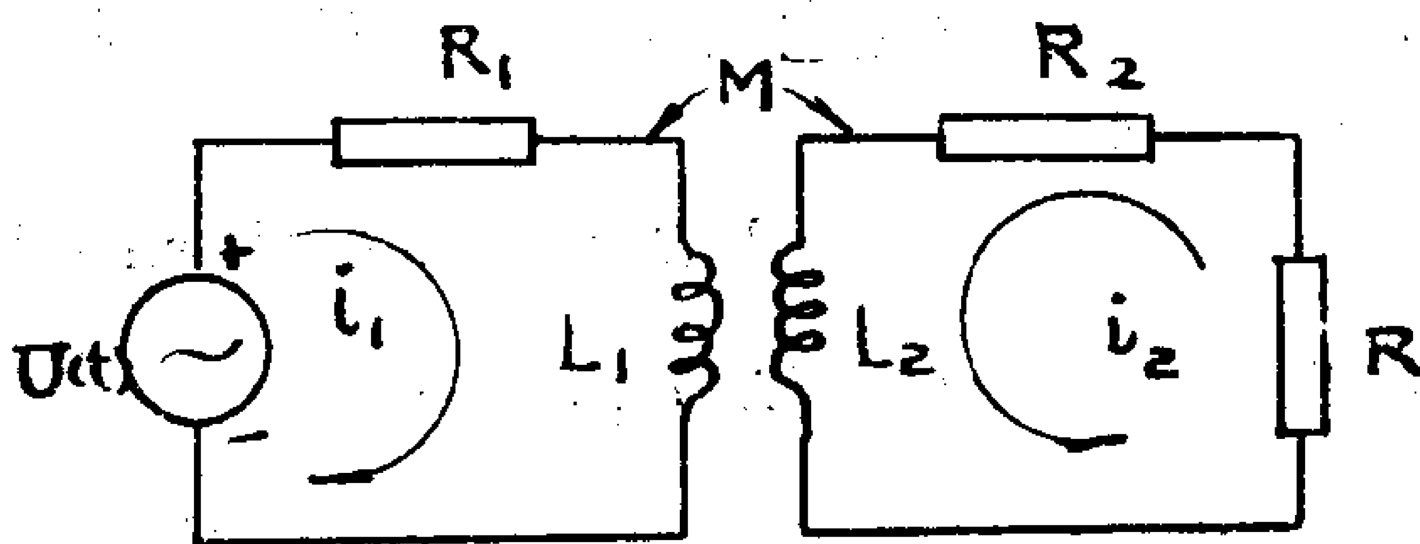


图 5.3

现把方程组改写成就 $\frac{di_1}{dt}$，$\frac{di_2}{dt}$ 解出的形式．首先，第一式乘以 L_2，第二式乘以 M，然后相减并解出 $\frac{di_1}{dt}$；其次，第一式乘以 M，第二式乘以 L_1，然后相减并解出 $\frac{di_2}{dt}$．结果如下：

$$\begin{cases} (L_1L_2-M^2)\frac{di_1}{dt}+L_2R_1i_1-M(R_2+R)i_2=L_2U(t), \\ (L_1L_2-M^2)\frac{di_2}{dt}-MR_1i_1+L_1(R_2+R)i_2=-MU(t). \end{cases} \tag{5.40}$$

因为通常 $L_1L_2-M^2>0$，所以上述方程组所对应的齐次方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\frac{L_2R_1}{L_1L_2-M^2}-\lambda & \frac{M(R_2+R)}{L_1L_2-M^2} \\ \frac{MR_1}{L_1L_2-M^2} & -\frac{L_1(R_2+R)}{L_1L_2-M^2}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

或

$$\lambda^2+\frac{L_1(R_1+R)+L_2R_2}{L_1L_2-M^2}\lambda+\frac{(R_2+R)R_1}{L_1L_2-M^2}=0\ .$$

设其特征根为 λ_1 及 λ_2，由于上述方程的系数都是正的，由二次代数方程的求根公式可知，故 λ_1 及 λ_2 在任何情况下都有负实部．由定理5.11知，当 $t\longrightarrow+\infty$ 时，它的所有解 $i_1(t)\longrightarrow0$，$i_2(t)\longrightarrow0$．由于它们都以指数式衰减，所以 $i_1(t)$，$i_2(t)$ 将很快地趋于零（消失），因此，对应齐次方程的解 $i_1(t)$，$i_2(t)$ 仅描述变压器工作的**暂态过程**．

现在来研究方程组（5.40）的一个特解，即变压器在输入电源谐变时，即输入 $U(t)=U_m\sin\omega t$ 电动势源时，变压器的工作状况，所谓**定态过程**，下面用待定系数法来求方程组（5.40）形如

$$\tilde{i}_1(t)=a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t,$$

$$\tilde{i}_2(t)=a_2\cos\omega t+b_2\sin\omega t,$$

的特解，其中 a_1，b_1，a_2，b_2 都是待定系数．

在理论上最感兴趣的是理想变压器，即 R_1，R_2 和 $L_1L_2-M^2$ 均很小的情形．另

外，我们最关心的是，输入电压与负载 R 上的电压之间的关系，为此．下面我们来求 $\widetilde{i}_2(t)$，且在确定它时，略去上述很小的量．由方程（5.40）中第一个方程（或第二个方程）得到

$$-MR(a_1\cos\omega t+b_2\sin\omega t)=L_2U_m\sin\omega t.$$

所以（注意到 $M\approx\sqrt{L_1L_2}$）

$$a_1=0\ ,\ b_2=-\frac{L_2U_m}{MR}=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}U_m.$$

因此，我们得到

$$\widetilde{i}_2(t)=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}U_m\sin\omega t.$$

由上式可得，负载 R 上的电压降

$$\widetilde{i}_2(t)\cdot R=-\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}U_m\sin\omega t,$$

振幅 U_2 等于

$$U_2=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}U_m.$$

量 $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ 称为变压器系数．因此，如果 $L_2>L_1$，我们得升压变压器

$$\frac{U_2}{U_m}>1\ ,$$

当 $L_2>L_1$，我们得到降压变压器

$$\frac{U_2}{U_m}<1$$

例2．（电滤波器）电滤波器如图5.4．交流电源 $U=U_m\sin\omega t$，求负载上的电压降，并讨论它与电源的关系．

解 分别对迴路 $abcda$ 与 $bcdb$ 应用基尔霍夫第二定律，得

$$\begin{cases}L\dfrac{di_1}{dt}+L\dfrac{di_2}{dt}+i_2R-U=0\ ,\\ L\dfrac{di_2}{dt}+i_2R+\dfrac{1}{c}\displaystyle\int(i_2-i_1)\,dt=0\ ;\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}L\dfrac{di_1}{dt}+L\dfrac{di_2}{dt}+i_2R-U=0\ ,\\ L\dfrac{d^2i_2}{dt}+R\dfrac{di_2}{dt}+\dfrac{1}{c}(i_2-i_1)=0\ .\end{cases}$$

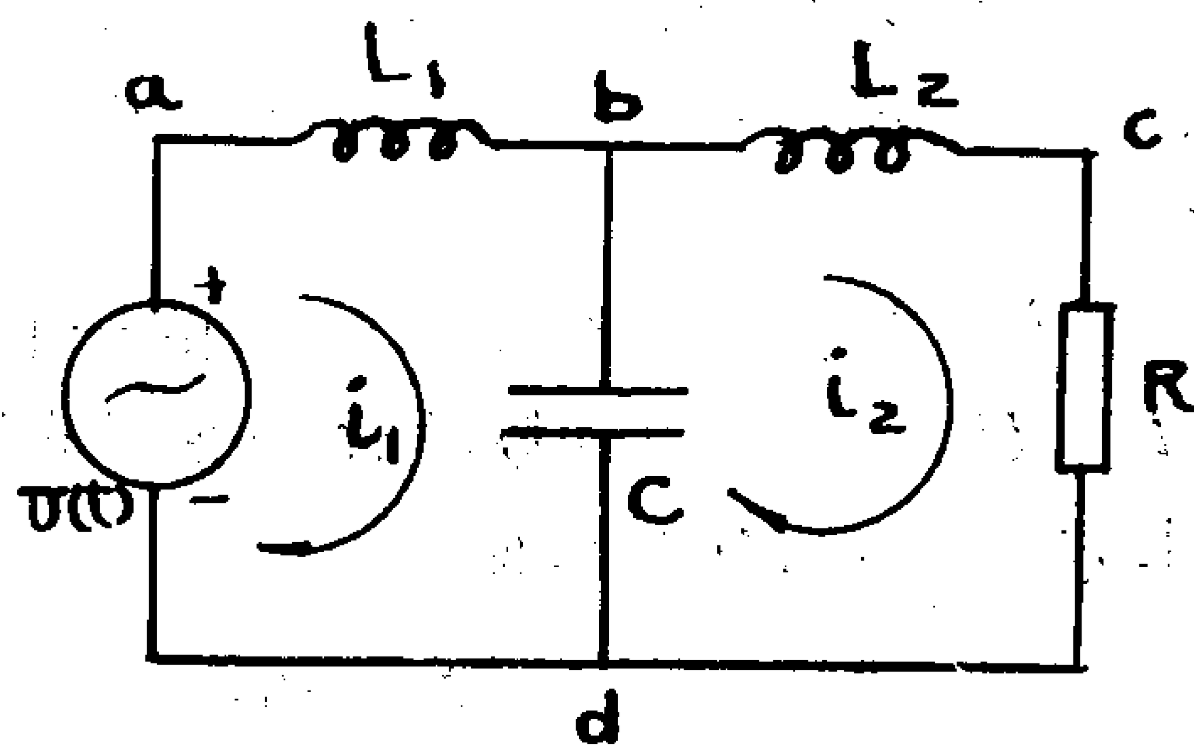


图 5.4

由于所求的是负载 R 上的电压降，所以要求出电流 $i_2(t)$．为此，从方程组中消

去 i_1，求出 i_2 所应满足的微分方程．对方程组的第二个方程微分，得

$$L\frac{d^3i_2}{dt^3}+R\frac{d^2i_2}{dt^2}+\frac{1}{c}\left(\frac{di_2}{dt}-\frac{di_1}{dt}\right)=0\ .$$

再由方程中第一个方程解出 $\frac{di_1}{dt}$ 并代入上式，得

$$L^2\frac{d^3i_2}{dt^3}+RL\frac{d^2i_2}{dt^2}+\frac{2L}{c}\frac{di_2}{dt}+\frac{R}{c}i_2=\frac{U_m}{c}\sin\omega t.$$

上述方程所对应的特征方程为

$$L^2\lambda^3+RL\lambda^2+\frac{2L}{c}\lambda+\frac{R}{c}=0\ .$$

显然，$L^2, RL, \frac{2L}{c}, \frac{R}{c}$ 均大于零，且 $a_1a_2=\frac{2RL^2}{c}$，$a_0a_3=\frac{RL^2}{c}$，所以 $a_1a_2>a_0a_3$，因此，特征方程的三个特征根其实部均是负的*．这样，在 i_2 的组成中齐次方程通解那部分将很快地消失（即暂态电流）在 i_2 的组成中非齐次方程的特解那部分才是 i_2 的主要部分（定态电流）．

可用待定系数法求非齐次方程形如

$$i_2=a_2\sin\omega t+b_2\cos\omega t$$

的特解，将它代入原方程，得

$$\left(\frac{R}{c}-RL\omega^2\right)a_2+\left(-\frac{2L\omega}{c}+L^2\omega^3\right)b_2=\frac{U_m}{c},$$

$$\left(\frac{2L\omega}{c}-L^2\omega^3\right)a_2+\left(\frac{R}{c}-RL\omega^2\right)b_2=0\ .$$

解之，得

$$a_2=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{U_m}{c}\left(\frac{R}{c}-RL\omega^2\right)\right],\quad b_2=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{U_m}{c}\left(L^2\omega^3-\frac{2L\omega}{c}\right)\right],$$

其中

$$\Delta=\left(\frac{R}{c}-RL\omega^2\right)^2+\omega^2\left(\frac{2L}{c}-L^2\omega^2\right)^2.$$

所以

$$i_2=a_2\sin\omega t+b_2\cos\omega t=A_2\sin(\omega t+\varphi),$$

这里，$A_2=\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}$，$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b_2}{a_2}$，用所求得的 a_2 及 b_2 代入 A_2 中，得

---

* 对于任何一个三次方程

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0\ ,\qquad a_0>0\ ,$$

如果 $a_1>0$，$a_2>0$，$a_3>0$ 且 $a_1a_2>a_0a_3$，则它的三个根的实部均是负的．该命题的证明可参看：Л．С．庞特里雅金著《常微分方程》（中译本第59页）．

$$A_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2}=\frac{U_m}{c\sqrt{\Delta}}=\frac{\frac{U_m}{c}}{\sqrt{\left(\frac{R}{c}-RL\omega^2\right)^2+\omega^2\left(\frac{2L}{c}-L^2\omega^2\right)^2}}.$$

由此可得，在负载上的电压降

$$U_{cd}=i_2R=A_2R\sin(\omega t+\varphi).$$

由上式可以看出，负载上的电压降 U_{cd} 的频率和电源 U 的频率一致，且 U_{cd}的最大值

$$\overline{U}_{cd}=A_2R=\frac{U_mR}{c\sqrt{\left(\frac{R}{c}-RL\omega^2\right)^2+\omega^2\left(\frac{2L}{c}-L^2\omega^2\right)^2}}.$$

把 U 看成输入电压，U_{cd} 看成输出电压，则当 U 的频率很小时，

$$\overline{U}_{cd}/U_m\approx R/c\sqrt{\left(\frac{R}{c}\right)^2}=1,$$

这就是说，低频电压通过电路后绝大部份可以传送出去.

当 ω 很大时，$\overline{U}_{cd}/U_m\approx R/c\sqrt{\omega^2(L^2\omega^2)^2}=R/cL^2\omega^2$，因此输出电压的最大值 $\overline{U}_{cd}$ 比输入电压的最大值 U_m 要小得多，表明高频电压基本上不能通电路，同此，如果输入信号有许多频率时，仅仅低频信号可以通过，高频信号不能通过而被电路吸收．这说明该电路具有过滤频率的作用，故称之为**虑波电路**.

例3．就无阻尼振动，即 $c=0$，$F\equiv 0$ 时，解方程组（5.1）.

解 在 $c=0$，$F\equiv 0$ 时，方程组（5.1）变成

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0, \\ m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2}+k_2(x_2-x_1)=0. \end{cases}$$

将上述方程组化为高阶方式求解更为方便，为此，两次微分第一个方程，得

$$m_1\frac{d^4x_1}{dt^4}+(k_1+k_2)\frac{d^2x_1}{dt^2}-k_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=0. \tag{5.41}$$

再从第一个方程中解 x_2：

$$x_2=\frac{m_1}{k_2}\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{k_1+k_2}{k_2}x_1, \tag{5.42}$$

并将它代入第二个方程，再解出$\dfrac{d^2x_2}{dt^2}$，

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=-\frac{m_1}{m_2}\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{k_1}{m_2}x_1.$$

将上式代入（5.41），得

$$\frac{d^4x_1}{dt^4}+\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{k_1k_2}{m_1m_2}x_1=0.$$

特征方程为

$$\lambda^4+\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)\lambda^2+\frac{k_1k_2}{m_1m_2}=0\,. \tag{5.43}$$

设$z=\lambda^2$，则（5.43）可写成

$$z^2+\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)z+\frac{k_1k_2}{m_1m_2}=0\,,$$

解之，得

$$z_{1,\,2}=\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}\right]$$

容易看出，$z_1<0$，$z_2<0$，因此；可令$z_1=-\alpha^2$，$z_2=-\beta^2$，这时

$$\alpha^2,\ \beta^2=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_1}\right)\mp\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}\right],$$

因此，方程（5.43）最后可写成

$$(\lambda^2+\alpha^2)(\lambda^2+\beta^2)=0\,,$$

故其特征根$\lambda_{1,\,2}=\pm i\alpha$，$\lambda_{3,\,4}=\pm i\beta$，所以

$$x_1=c_1\sin\alpha t+c_2\cos\alpha t+c_3\sin\beta t+c_4\cos\beta t\,, \tag{5.44}$$

将它代入（5.42）中得到

$$x_2=\frac{m_1}{k_2}\left[-c_1\alpha^2\sin\alpha t-c_2\alpha^2\cos\alpha t-c_3\beta^2\sin\beta t-c_4\beta^2\cos\beta t\right]$$

$$+\frac{k_1+k_2}{k_2}(c_1\sin\alpha t+c_2\cos\alpha t+c_3\sin\beta t+c_4\cos\beta t)$$

$$=\frac{k_1+k_2-m_1\alpha^2}{k_2}(c_1\sin\alpha t+c_2\cos\alpha t)+\frac{k_1+k_2-m_1\beta^2}{k_2}(c_3\sin\beta t+c_4\cos\beta).\ (4.45)$$

至此，（5.44）及（5.45）就构成了方程组的通解.

第五章综合习题

1．求解下列各方程组：

1）$\begin{cases}\dot x=x+z-y,\\ \dot y=x+y-z,\\ \dot z=2x-y.\end{cases}$

2）$\begin{cases}\dot x=x-y-z,\\ \dot y=x+y,\\ \dot z=3x+z.\end{cases}$

3）$\begin{cases}\dot x=2x+2z-y,\\ \quad=x+2z,\\ \dot z=y-2x-z.\end{cases}$

4）$\begin{cases}\dot x=2x+y,\\ \dot y=2y+4z,\\ \dot z=x-z.\end{cases}$

5）$\begin{cases}\dot x=2x-y-z,\\ \dot y=2x-y-2z,\\ \dot z=2z-x+y,\end{cases}$

2. 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=p(t)x+q(t)y,\\ \dfrac{dy}{dt}=q(t)x+p(t)y.\end{cases}$$

其中 $p(t)$，$q(t)$ 在$[a, b]$上连续.

3. 设有二阶常系数方程组

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}\dot{x}_1+a_{13}x_2+a_{14}\dot{x}_2+\cdots+a_{1\,2n-1}x_n+a_{1\,2n}\dot{x}_n,\\ \ddot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}\dot{x}_2+a_{23}x_2+a_{24}\dot{x}_2+\cdots+a_{2\,2n-1}x_n+a_{2\,2n}\dot{x}_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \ddot{x}_n=a_{n1}x_1+a_{n2}\dot{x}_1+a_{n3}x_2+a_{n4}\dot{x}_2+\cdots+a_{n\,2n-1}x_n+a_{n\,2n}\dot{x}_n.\end{cases}\qquad (*)$$

试将（$*$）化成一阶方程组，使之形如

$$\frac{dY}{dt}=AY,\quad A=\begin{pmatrix}O_n & E_n\\ A_1 & A_2\end{pmatrix},$$

其中 Y 是 $2n$ 维列向量，O_n 是 $n\times n$ 零矩阵，E_n 是 $n\times n$ 单位矩阵，A_1,A_2 各为 $n\times n$ 矩阵.

4. 设有时滞方程组

$$\frac{dY(t)}{dt}=AY(t)+BY(t-\tau),\qquad (*)$$

其中 $Y(t)$ 是 n 维函数列向量，A，B 是 $n\times n$ 矩阵，τ 是实常数，若使（$*$）有形如 $e^{\lambda t}R$ 的解，常数 λ 和常向量 R 应满足什么条件？

5. 设 $n\times n$ 矩阵函数 $A_1(t)$，$A_2(t)$在(a, b)上连续，试证明，若方程组

$$\frac{dX}{dt}=A_1(t)X \quad 与 \quad \frac{dX}{dt}=A_2(t)X$$

有相同的基本解组，则 $A_1(t)\equiv A_2(t)$.

6. 已知

$$\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2.\end{cases}$$

的基本解组，试求 $a_{ij}(t)(i, j=1, 2)$.

7. 求出方程组

$$\begin{cases}t\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1-x_2,\\ t\dfrac{dx_2}{dt}=2x_1-x_2.\end{cases}$$

的一切解，并证明，它的任何二个线性无关解的朗斯基等于 ct，c 是非零常数，这时朗斯基在 $t=0$ 时等于零，而却不恒不等于零，试说明，定理 5.3 为何在此不成立？

8． 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -ay_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = (\sin\ln t + \cos\ln t - 2a)y_2. \end{cases}$$

的通解，并证明，当 $a > \dfrac{1}{2}$ 时，一切解有界，且当 $t \longrightarrow +\infty$ 时，一切解均趋于零．

9． 设 $x^{(1)}(t)$，$x^{(2)}(t)$，…，$x^{(n+1)}(t)$ 是方程组

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(x) \tag{1}$$

的 $n+1$ 个线性无关的解，求证（1）的任何解 $X(t)$ 恒可表为

$$X(t) = a_1x^{(1)}(t) + a_2x^{(2)}(t) + \cdots + a_{n+1}x^{(n+1)}(t), \tag{2}$$

其中 a_1，a_2，…，a_{n+1} 是满足

$$a_2 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = 1$$

的某些常数；反之，对于任何满足上式的常数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 的（2）式均是（1）的解．

第六章 定性理论和稳定性理论简介

首先介绍定性理论.

从牛顿（*Newton*）——莱布尼兹（*Leibniz*）到十九世纪后半期索夫·李（*Lie*）的著作发表为止，在这一段时间里，微分方程的基本问题是，用各种方法求方程以初等函数以及由初等函数积分表出的通解．并且尽量扩大这种解法的应用范围，正像我们在前几章学过的那样，把它叫做初等解法．

人们最初希望对所有微分方程都能用初等解法求解．但是在求解过程中，遇到的实际问题越来越多，并且有的是无法解决的．这样，使人们对某些微分方程用初等解法求解的可能性，逐渐产生怀疑．最后正如在第一章所指出的那样，数学家刘维尔在1841年从相反的方面得到了结论，他指出即使是不太复杂的黎卡提（*Riccatti*）方程

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+g(x)y+R(x)$$

也不可能用初等方法求解．

刘维尔的结果对于微分方程的发展产生了极大的影响，使微分方程的研究方法发生了一个转折．既然初等解法有很大的局限性，而在十九世纪后半期，天体力学和其它技术科学的发展又提出了大量的微分方程问题，这就迫使人们沿着另一条新的路径来解决这些实际中提出的问题．定性理论就是在这种情况下发展起来的．

某些实际问题，只需要知道解的这种或那种性质．比如在非线性振荡中，我们最关心的是系统是否存在周期解，更确切地说，是否存在叫做极限环的周期解．有的则要求知道解的零点，以及解的有界性．定性理论的方法就是在不求出解的情况下，根据方程本身的结构特性，来研究解的这些性质的．

定性理论在非线性振动、自动控制以及宇宙航行等等很多尖端科学方面都有着广泛的应用．

平面定性理论是通过在**相平面**上研究方程的轨线分布来研究解的性质的．也就是了解了轨线的全局结构，解的性质也是清楚了．在轨线的结构中，两个特殊的轨线：奇点和极限环处于很重要的地位．弄清奇点附近的轨线分布和确定极限环，是研究轨线全局结构中首先要解决的问题．本章只对定性理论作一个简单介绍，所涉及的内容有奇点附近的轨线分布和极限环两方面．对它们也只作了初步讨论，有些只把定理提出而未给证明．

还应当指出，即使是这一章所介绍的比较近代的微分方程理论，也与中学的数学内

容有着密切的联系．例如在奇点分类中，主要就是应用二次三项式 ax^2+bx+c 的根的判别式及二次曲线的性质，在李雅普诺夫稳定性理论简介中也用到很多代数与数学分析的知识．因而，通过这一章的学习可以进一步加深对于中学数学内容的理解与掌握，开阔读者的眼界，请读者注意．

§6.1 奇点附近的轨线分布

1°．相平面和轨线概念

以后我们主要研究如下的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y). \end{cases} \tag{6.1}$$

由于在方程组的右端函数中，不显含自变量 t，把它叫做**自治系统**。在物理学和技术科学中，这类方程大量出现．

例如，弹性运动中就有方程

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+kx=0$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

令 $y=\dfrac{dx}{dt}$，则方程可化为方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-2ny-kx. \end{cases} \tag{6.2}$$

对于自治系统（6.1）的每一个解

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases} \tag{6.2}$$

以后我们将在相平面上，以轨线的形式研究它们．

首先给出轨线的动力学解释．我们把自变量 t 看成时间参数，从运动的观点来看，随着时间 t 的变化，解(6.2)就在 xoy 平面上描出一条曲线．我们把它叫做方程(6.1)的**轨线**．也叫做**相轨线**． xoy 平面叫做**相平面**．轨线图象叫做**相图**．在这种解释中，方程组（6.1）的解再不是三维空间的曲线，而是在 xoy 平面二维空间中的轨迹．这种动力学的解释，要比积分曲线族的几何解释明确得多。

从上面的规定可以看出，轨线具有下面几个性质：

（1）在时间 t 的变化过程中，轨线是有方向的；

（2）方程（6.1）的常数解

$$\begin{cases} x = c_1 \\ y = c_2 \end{cases} \quad (c_1, \ c_2\text{为常数})$$

对应于相平面上的一个点．因为在时间t变化时，点（x，y）总停留在点（c_1,c_2）原地不动，这时点（c_1,c_2）称为系统（6.1）的**平衡位置**．

（3）方程（6.1）的周期解

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

对应于相平面上的一条闭轨。

因为，如果两个函数$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 的周期为T，就有

$$\varphi(t) = \varphi(t+T),$$
$$\psi(t) = \psi(t+T).$$

很明显在时间t的变化过程中，经过一个周期T之后，点的运动又回到原来的位置．这样的点的运动轨迹就构成一条闭曲线．

（4）如果（6.1）满足解的唯一性，则对应于（6.1）的两个解的轨线，或者没有交点，或者完全重合．

这一性质不太明显，下面稍加解释．

我们只要证明：如果两条轨线有一个交点，则必为同一轨线就可以了。

设（6.1）的两个解

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \psi_1(t) \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x = \varphi_2(t) \\ y = \psi_2(t) \end{cases}$$

所对应的轨线分别为l_1，及l_2．如果它们交于一点$P_0(x_0, y_0)$，且

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) = x_0$$
$$\psi_1(t_1) = \psi_2(t_2) = y_0.$$

现在考虑函数

$$\begin{cases} x = \varphi_2(t+t_2-t_1) = \overline{\varphi}(t) \\ y = \psi_2(t+t_2-t_1) = \overline{\psi}(t). \end{cases}$$

可以证明这组函数也是（6.1）的一个解，并且它所对应的轨线也是l_2，又因为

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1+t_2-t_1) = \overline{\varphi}(t_1) = x_0,$$
$$\psi_1(t_1) = \psi_2(t_1+t_2-t_1) = \overline{\psi}(t_1) = y_0,$$

于是可知（6.1）的两个解

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \psi_1(t) \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x = \overline{\varphi}(t) \\ y = \overline{\psi}(t) \end{cases}$$

满足同一初始条件．又因为（6.1）满足解的唯一性，于是二者为同一解．所以它们的轨线l_1及l_2为同一轨线．

例如无阻尼振动

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

可化成方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\omega^2 x.\end{cases}\tag{6.3}$$

解方程组，得

$$\begin{cases}x=k\cos(\omega t+\alpha)\\ y=-k\omega\sin(\omega t+\alpha)\end{cases}\tag{6.4}$$

（其中k，α由任意常数c_1, c_2确定）

由（6.4）中消去参数t，得到方程组（6.3）的轨线方程

$$\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{\omega^2 k^2}=1.$$

这是一个层层相套的椭圆族（如图6.1）.

正像前面所说的那样，因为$x=0$，$y=0$是（6.3）的常数解，所以原点是平衡位置．因为（6.3）除此解之外都是周期解，反映在相图上所有其它轨线都是闭轨．

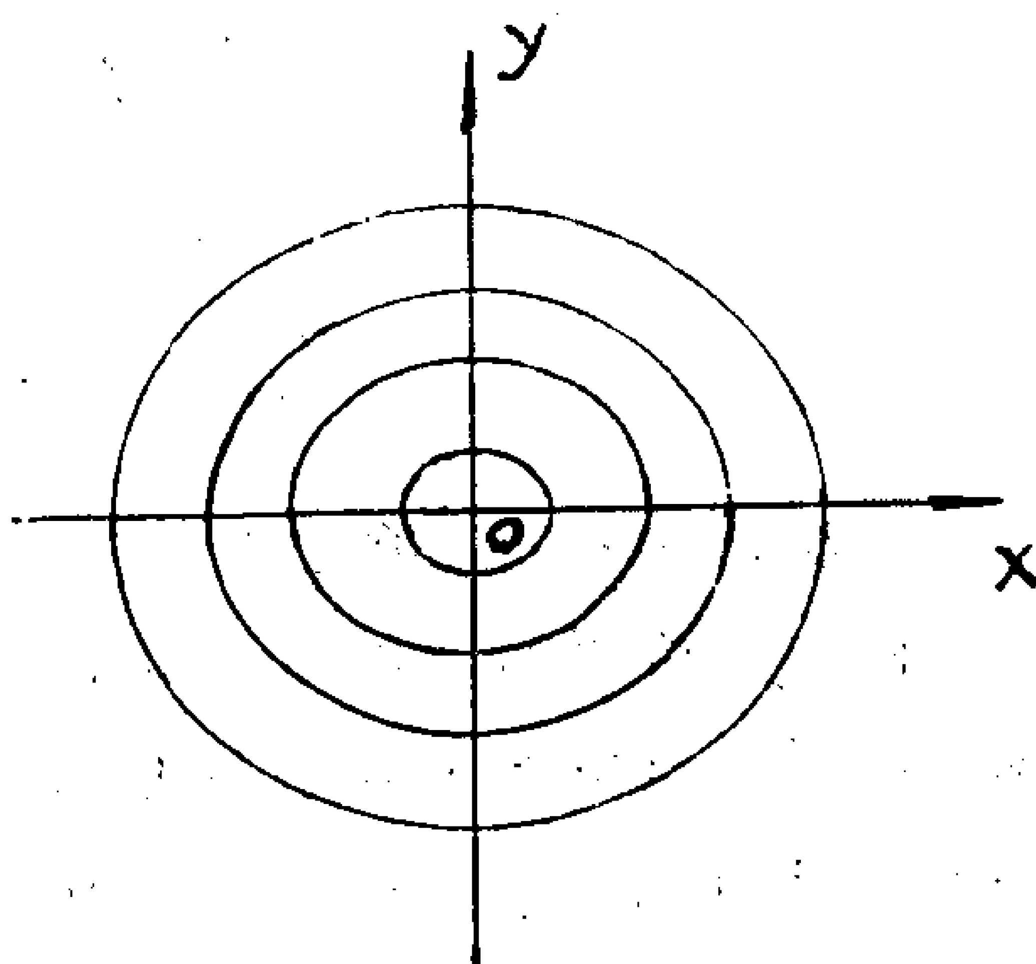


图 6.1

2°．二阶线性系统奇点附近的轨线分布

给定系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y).\end{cases}\tag{6.1}$$

定义6.1 使$P(x,y)=0$，$Q=(x,y)=0$的点，称为（6.1）的**奇点**.

定性理论的目的是弄清系统的轨线结构．它的作法是首先把系统的特殊要素——奇点，极限环，分界线等搞清．其中奇点处于重要的地位．因为要想了解轨线的全局结构，必须首先弄清在奇点附近的轨线分布．奇点问题是定性理论的基础之一．

由**裴戎（Perron）定理**（见本节3°），像（6.1）这样的非线性系统的轨线，在奇点（0,0）附近的分布情况，和它的**一次近似**系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P'_x(0,0)\,x+P'_y(0,0)\,y\\ \dfrac{dy}{dt}=Q'_x(0,0)\,x+Q'_y(0,0)\,y\end{cases}$$

的轨线在奇点（0,0）附近的分布有关．也就是和一个线性系统的轨线在奇点(0,0)附近的分布有关．为此，我们先来搞清楚线性系统的轨线在奇点附近的分布情况．

考虑二阶线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y.\end{cases}\tag{6.5}$$

我们假定其系数阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

为非奇异矩阵，即其行列式$|A|\neq 0$．

显然（6.5）只有一个奇点（0，0）．我们研究（6.5）在（0，0）附近的轨线分布．因为（6.5）是可解的，我们的作法是，先求出系统的通解，然后消去参数t，得到轨线方程．从而了解在奇点（0，0）附近的轨线分布情况．根据奇点附近轨线分布形式，可以确定奇点有四种类型，即结点，鞍点，焦点和中心．

为了讨论问题方便，我们把方程写成向量形式．

令
$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}，\quad 则\quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}.$$

此时方程组（6.5）可以写成向量形式
$$\frac{dX}{dt}=AX. \tag{6.6}$$

（1）系数阵为标准型的二阶线性系统的轨线分布

我们研究线性系统（6.6）在奇点（0，0）附近的轨线分布方法，首先是应用线性变换，把系统（6.6）化成标准型，从化成标准型的方程中求出解来，确定其轨线分布，然后再回过头来考虑系统（6.6）在奇点附近的轨线分布．

根据线性代数中关于矩阵的定理，存在非奇异矩阵T，使得
$$J=TAT^{-1}\ （J为约当标准型）.$$

令
$$\widetilde{X}=\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}，作代换\widetilde{X}=TX，\quad (X=T^{-1}\widetilde{X})，$$

则
$$\frac{d\widetilde{X}}{dt}=T\frac{dX}{dt}=TAT^{-1}\widetilde{X}=J\widetilde{X},$$

于是系统（6.6）化成为
$$\frac{d\widetilde{X}}{dt}=J\widetilde{X} \tag{6.7}$$

由线性变换的理论可知，标准型J的形式由系数矩阵A的特征根的情况决定．

（i）A的特征根为相异（非零）实根λ，μ时，
$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

（ii）A的特征根为重根$\lambda\neq 0$时，由于A的初等因子不同，A的标准型J可能有两种：
$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\quad 或\quad J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

（iii）A的特征根为共轭复根$\alpha\pm\beta i\,(\alpha^2+\beta^2\neq 0)$时，

$$J=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(因 $|A|\neq 0$，故特征根不能为零.)

考察（6.7），为了书写方便，去掉上标，把（6.7）写成

$$\frac{dX}{dt}=JX. \tag{6.7$'$}$$

下面就 J 的不同情况，研究（6.7）（即系统（6.7）'）的轨线分布.

（i）当

$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \qquad (\lambda\neq\mu)$$

系统（6.7）' 写成纯量形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\lambda x \\ \dfrac{dy}{dt}=\mu y \end{cases} \tag{6.8}$$

求它的通解，得

$$x=c_1e^{\lambda t},\quad y=c_2e^{\mu t}. \tag{6.9}$$

消去参数 t，得轨线方程

$$y=C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}\ (C\text{为任意常数}). \tag{6.10}$$

这里假定 $|\mu|>|\lambda|$，即 μ 表示特征根中绝对值较大的一个（显然，这不妨碍对一般性的讨论，如 $|\mu|<|\lambda|$，则只要互换 x 轴和 y 轴）.

1. λ，μ 同号

这时由于 $\frac{\mu}{\lambda}>1$，轨线（6.10）是抛物线型的（参看图6.2及图6.3）.

$\mu<\lambda<0$

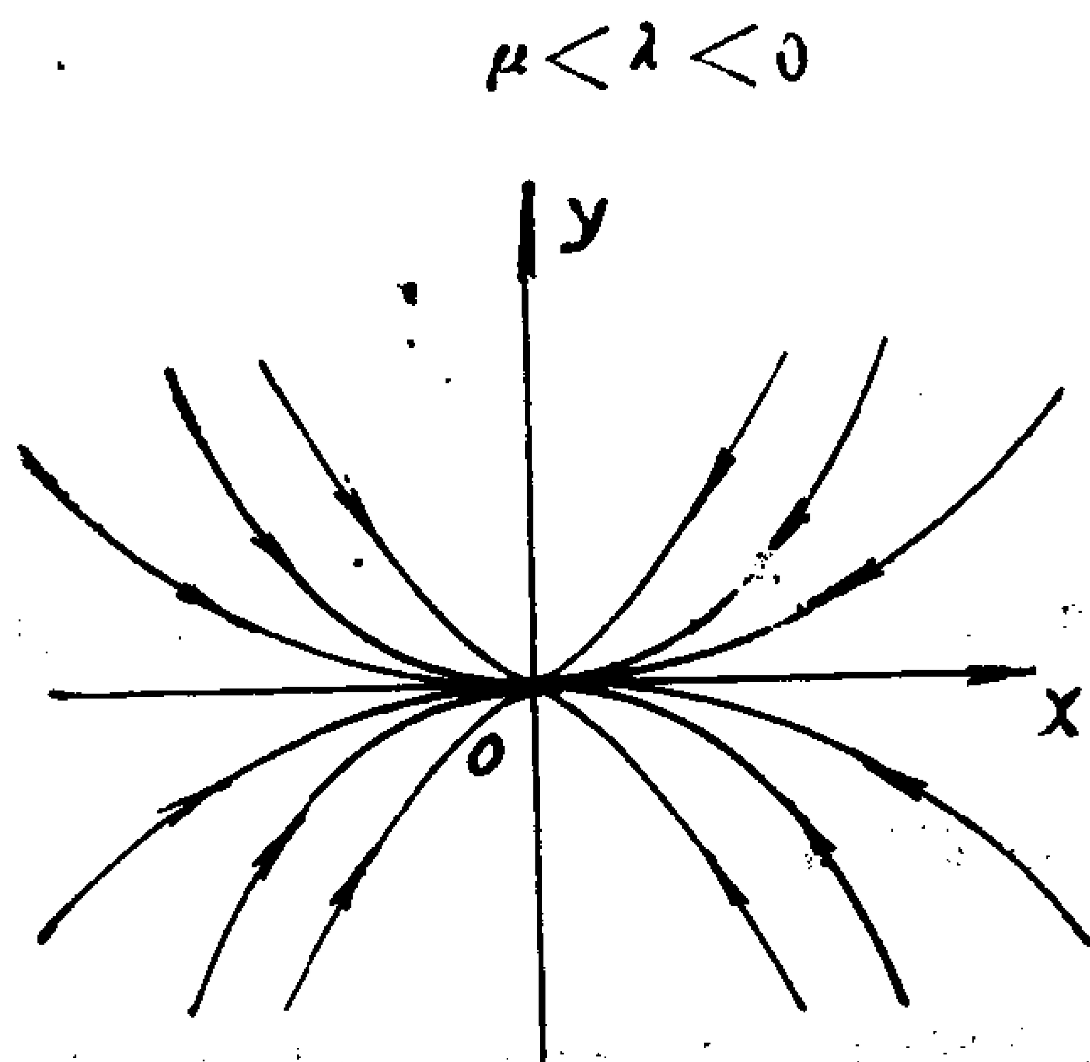


图 6.2

$0<\lambda<\mu$

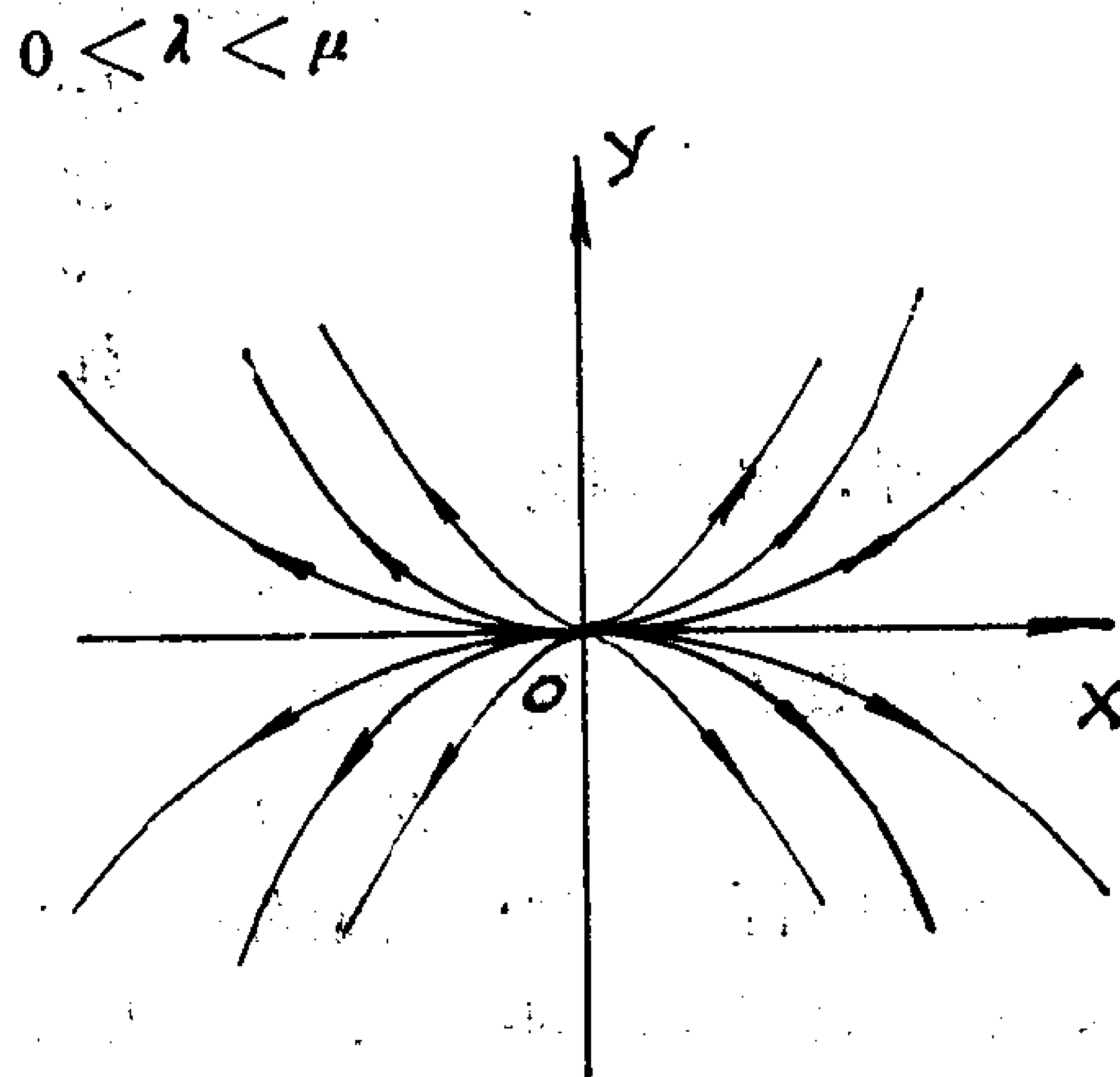


图 6.3

同时 $y=0$（即 x 轴，对应 $c=0$）和 $x=0$（即 y 轴，对应 $c=\infty$）* 也是轨线. 容易

* 其实 $x=0$（y 轴）和 $y=0$（x 轴）都是由三条轨线组成. 正，负半轨及奇点.

看到，所有轨线（除了y轴）都在坐标原点（0，0）与x轴相切．在奇点O附近轨线具有这样的分布，称奇点O为**结点**．

从方程的解（6.9），还不难看出，当$t\to+\infty$时，相点沿轨线的运动方向．比如，当λ，μ，都是负值时，相点沿着轨线趋向原点（参看图6.2）（下面为简便计，就说成轨线的方向是趋近于（或远离于）原点）．而 λ，μ 都是正值时，轨线的方向为远离原点（参看图6.3）．

以后如果当$t\to+\infty$时，轨线上的点趋向于结点，我们就称此结点为**稳定的**．而如果当$t\to+\infty$时，轨线上的点远离此结点，我们就称此结点为**不稳定的**．

因此在方程(6.10)中，当λ，μ同时为负，奇点O是**稳定结点**，而当λ，μ同时为正，则奇点O为**不稳定结点**．

2. λ，μ异号

这时，由于$\frac{\mu}{\lambda}<0$，轨线方程（6.10）表示一个双曲型的曲线族，以两个坐标轴为渐近线（参看图6.4）．坐标轴也是轨线．

在奇点O附近，轨线具有这样的分布，称此奇点为**鞍点**．从轨线方程（6.10）可以看出，当$t\to+\infty$时，除掉x轴（或y轴）上两条轨线外，其余轨线的方向都远离原点．这是鞍点的特点．

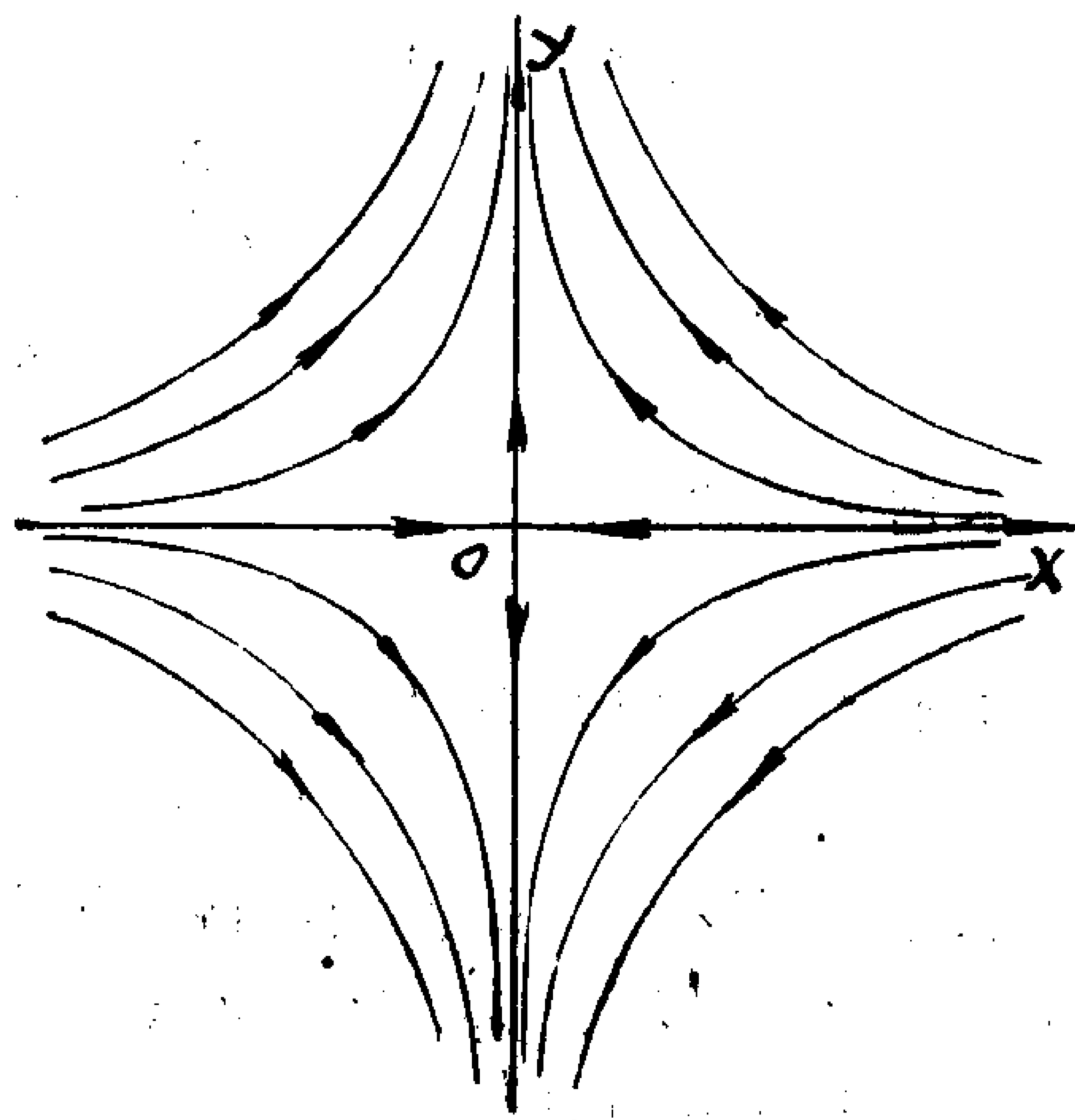


图 6.4

(ii) 当

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

时，把系统（6.7）′ 写成纯量形式就得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda x,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\lambda y.\end{cases}\tag{6.11}$$

积分此方程，得通解为

$$x=c_1e^{\lambda t}\quad y=c_2e^{\lambda t}.\tag{6.12}$$

消去参数t，得轨线方程

$$y=c\,x\qquad（c\text{为任意常数}）$$

根据λ的符号，轨线图象如图 6.5 和图 6.6．

轨线为从奇点发出的射线．在奇点附近轨线具有这样的分布，称奇点为**临界结点**．从通解（6.12）可以看出，当$\lambda<0$时，轨线的方向趋近于原点，当$\lambda>0$时，轨线的方向远离原点．前者临界结点是**稳定的**，后者是**不稳定的**．

当

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$\lambda<0$

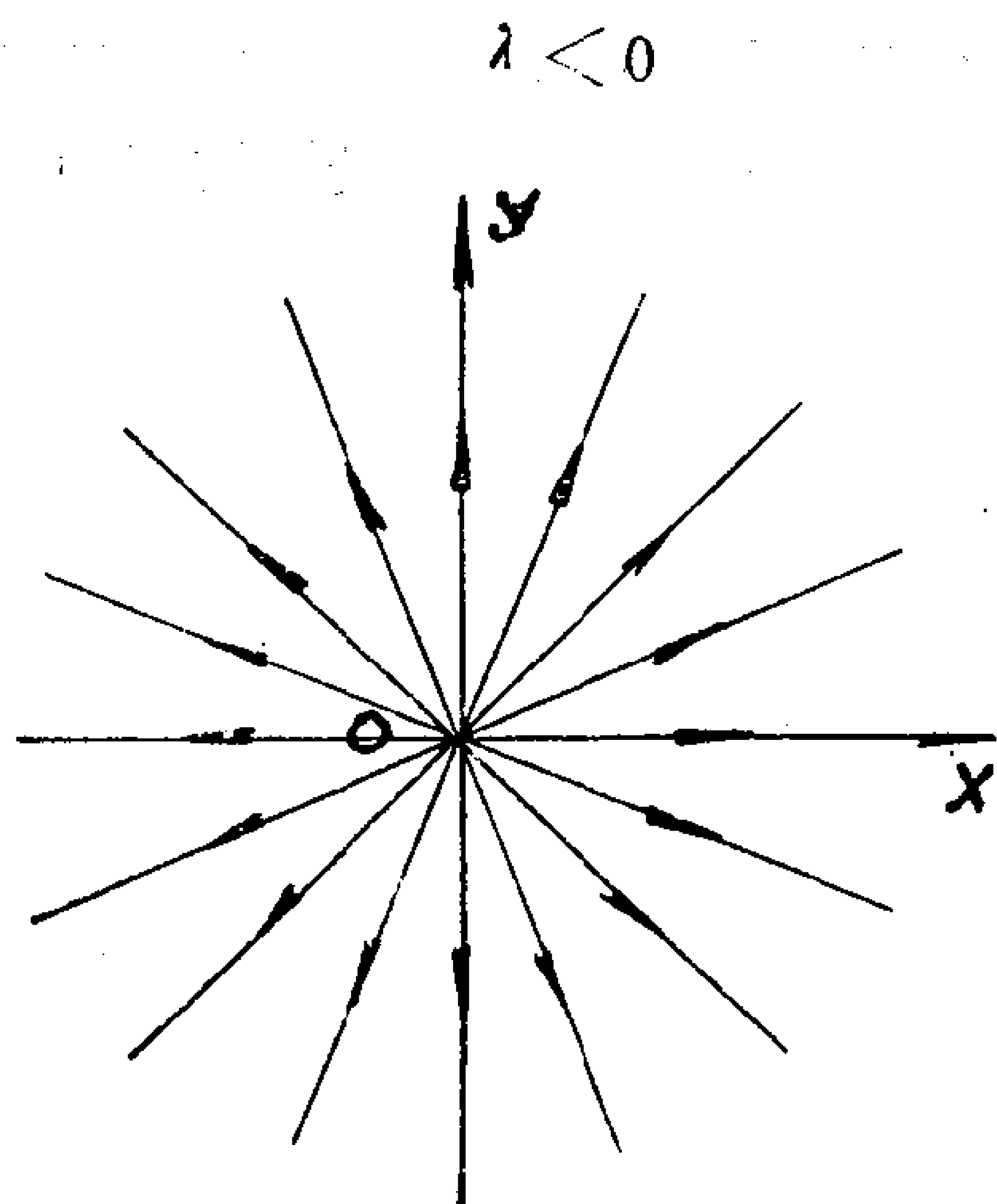


图 6.5

$\lambda>0$

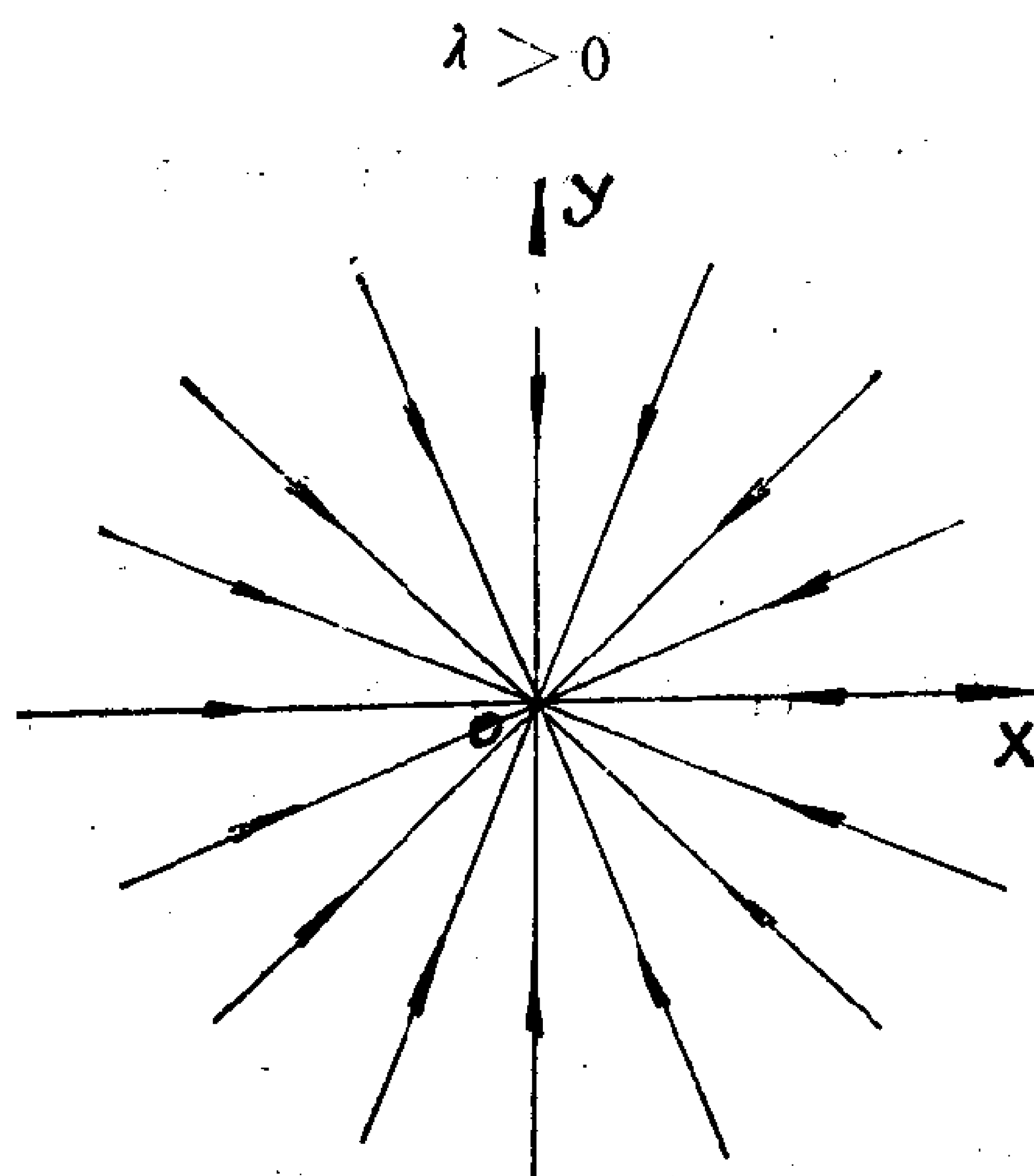


图 6.6

时，把系统（6.7）′ 写成纯量形式，得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda x,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda y.\end{cases} \tag{6.13}$$

解方程组（6.13），它的通解为

$$x=c_1e^{\lambda t},\qquad y=(c_1t+c_2)e^{\lambda t}. \tag{6.14}$$

消去参数 t，得轨线方程

$$c_1\lambda y=(c_1\ln|x|+c_0)x.$$

由此看到：$\lim\limits_{x\to0}y=0$，$\lim\limits_{x\to0}y'=\infty$；所以，所有轨线在原点处与 y 轴相切．此处，两个半轴 $x=0$，$y>0$ 和 $x=0$，$y<0$ 也都是轨线．轨线的形状如图 6.7 或 6.8 所示．

$\lambda<0$

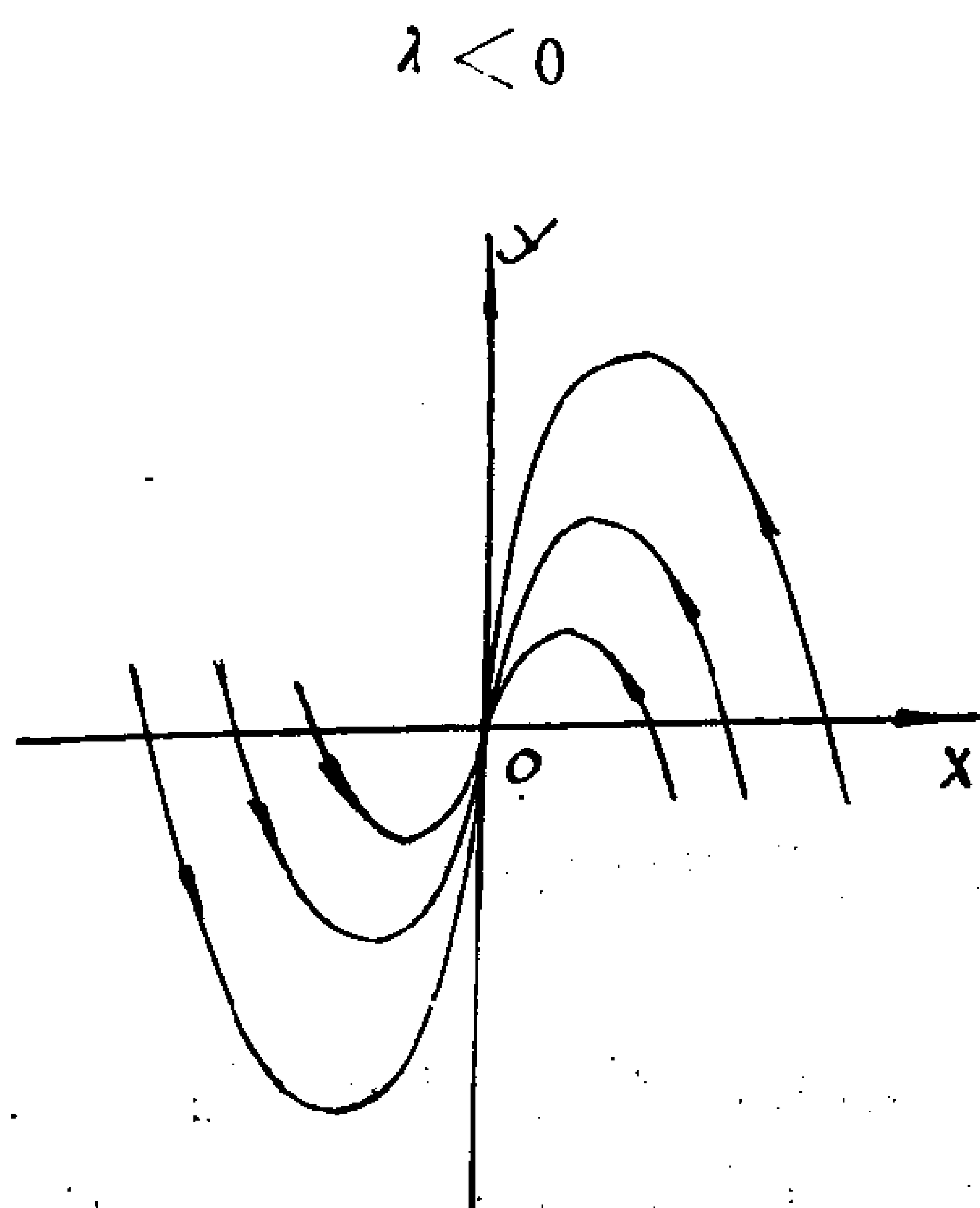


图 6.7

$\lambda>0$

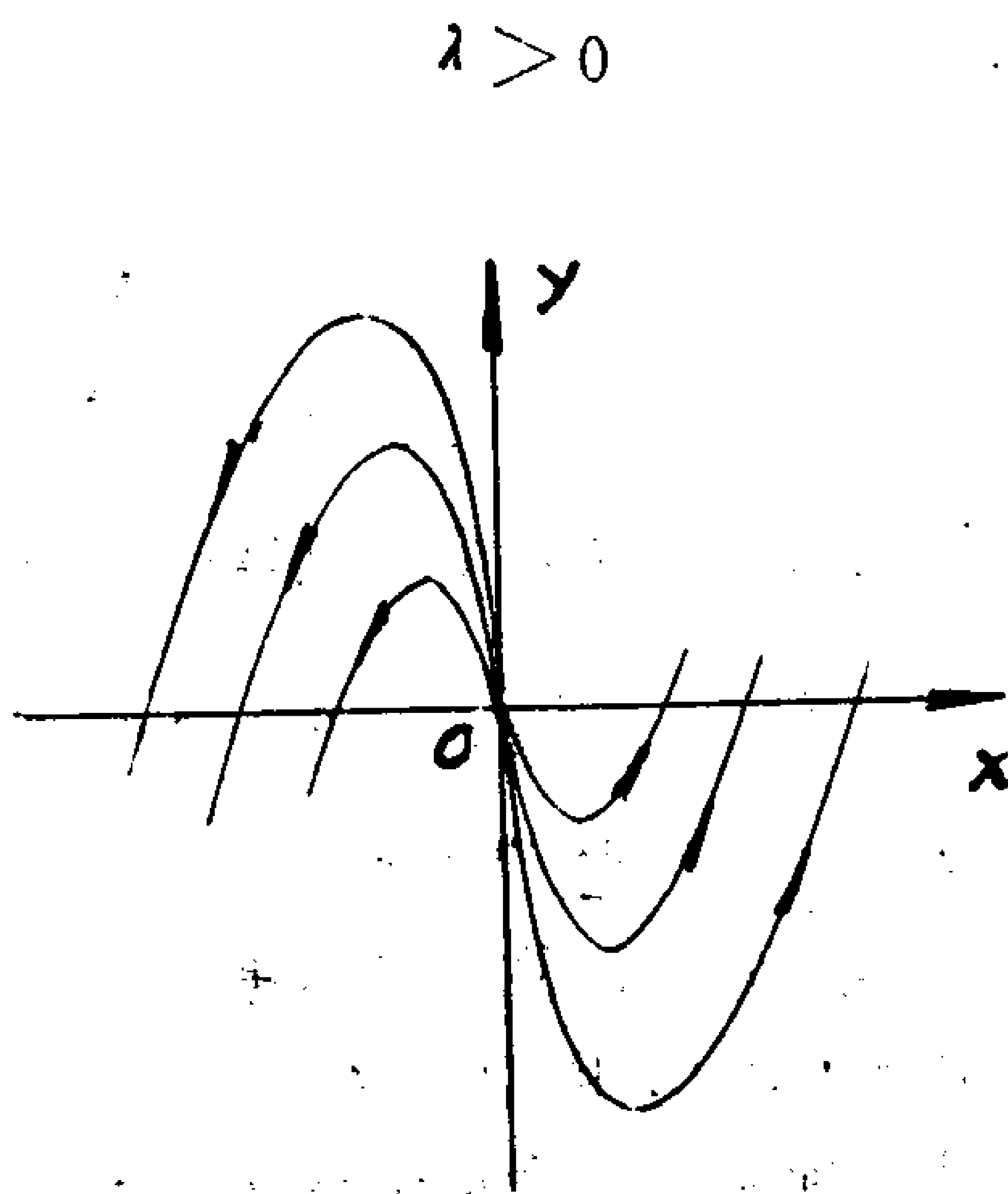


图 6.8

轨线在奇点附近具有这样的分布，称奇点O为**退化结点**，并且当$\lambda<0$时，轨线的方向趋于奇点，所以退化结点是**稳定的**（参看图6.7）；而当$\lambda>0$时是**不稳定的**（参看图6.8）.

(iii) 当

$$J=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (\beta \neq 0)$$

时，把系统（6.7）′ 写成纯量形式，有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha x+\beta y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-\beta x+\alpha y \ . \end{cases} \tag{6.15}$$

积分上述方程组，将第一个方程乘以x，第二个方程乘以y，然后相加，得

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=\alpha(x^2+y^2)$$

或写成

$$\frac{d\,(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}=\alpha\,dt\,.$$

因而得到

$$\sqrt{x^2+y^2}=c_1e^{\alpha t} \text{ 或 } \rho=c_1e^{\alpha t}.$$

其次，对方程（6.15）第一个方程乘以y，第二个方程乘以x，然后相减，得

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=\beta(x^2+y^2),$$

或写成

$$d\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=-\beta\,dt\ .$$

于是得

$$\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=-\beta t+c_2$$

或

$$\theta=-\beta t+c_2\ .$$

如果消去参数t，则得轨线的极坐标方程

$$\rho=c\,e^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}. \tag{6.16}$$

如$\alpha\neq 0$，则它为对数螺线族，每条螺线都以坐标原点O为渐近点．在奇点附近轨线具有这样的分布，称奇点为**焦点**．

由$\rho=c_1e^{\alpha t}$，所以当$\alpha<0$时，随着t的无限增大，相点沿着轨线趋于坐标原点，这时，称原点是**稳定焦点**（见图6.9），而当$\alpha>0$时，相点沿着轨线远离原点，这时，称原点是**不稳定焦点**（见图6.10）．

$\alpha < 0$

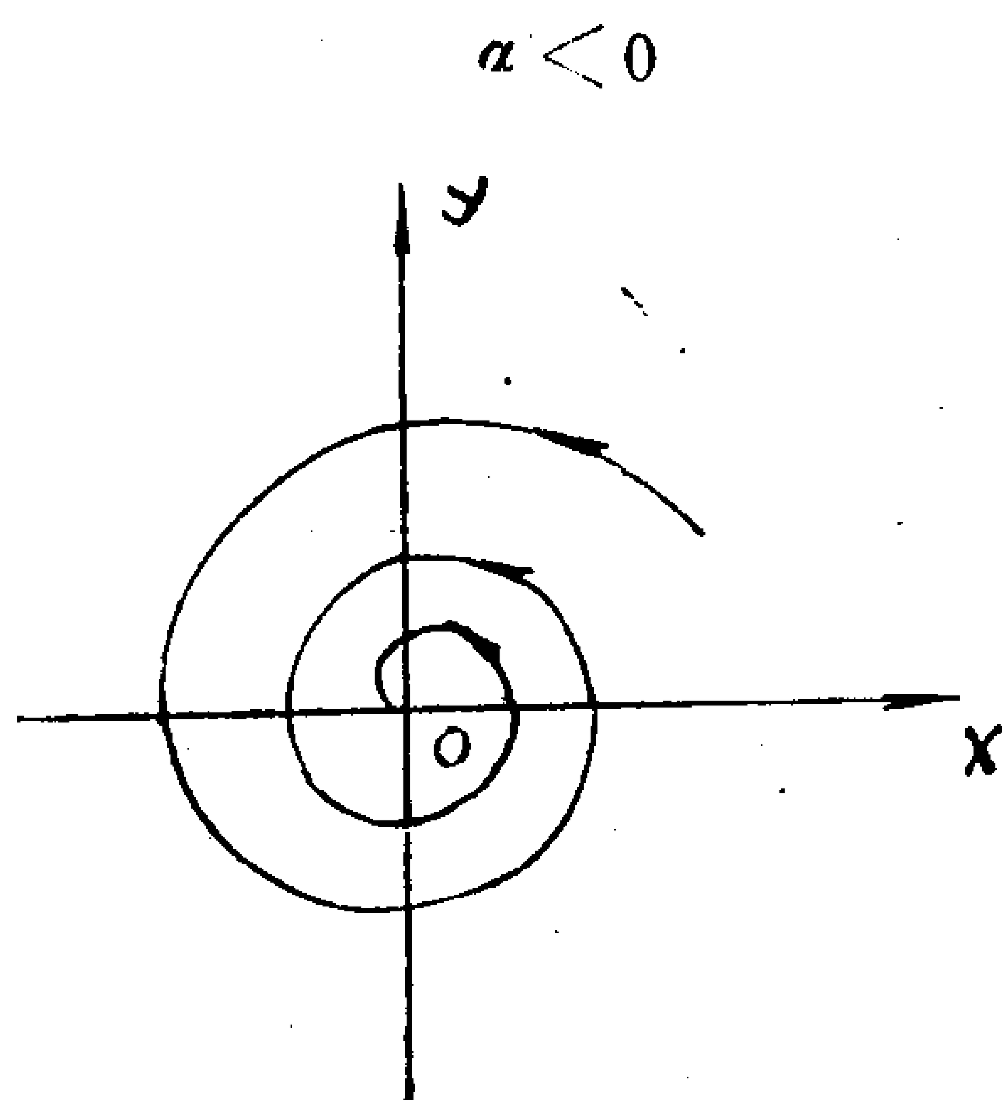


图 6.9

$\alpha > 0$

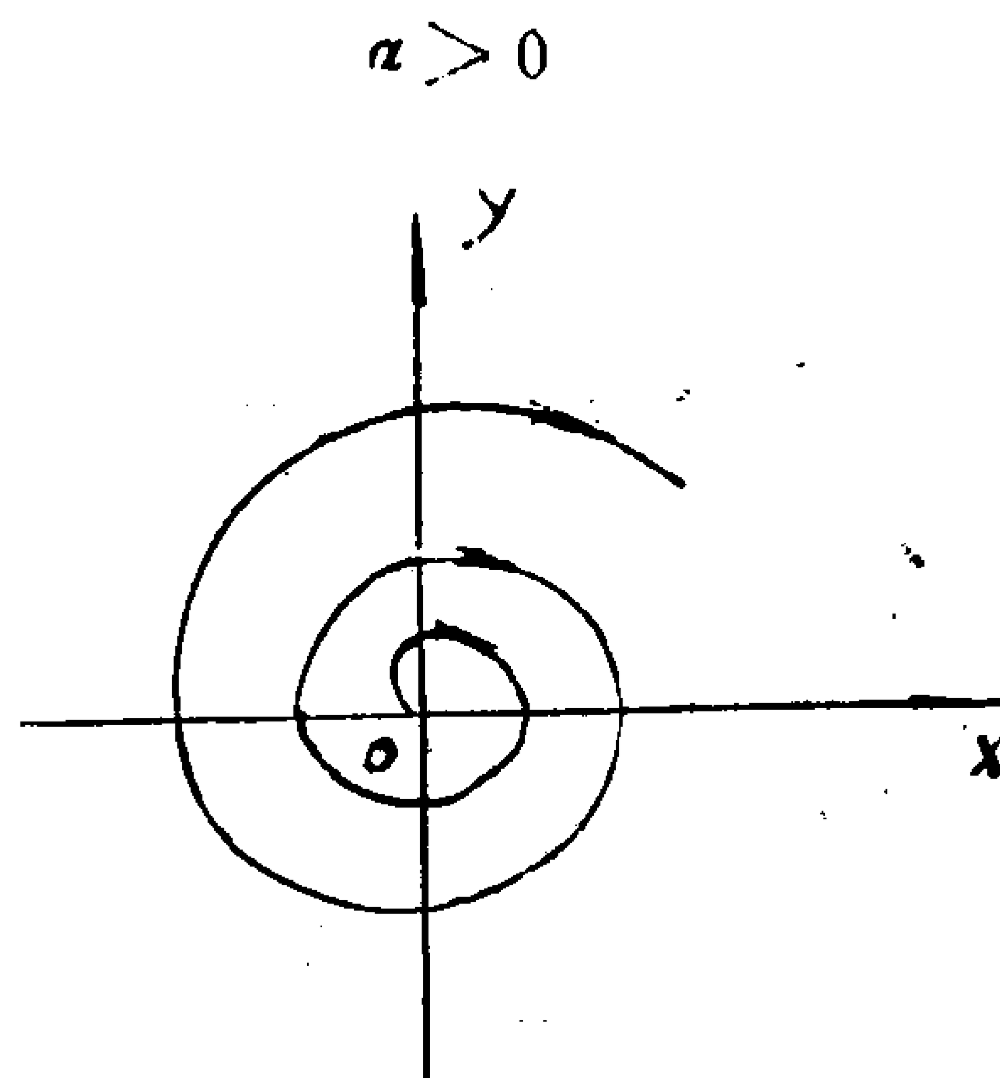


图 6.10

如$\alpha = 0$，则轨线方程（6.16）成为

$$\rho = c \quad 或 \quad x^2 + y^2 = c_2$$

它是以坐标原点为中心的圆族．在奇点附近轨线具有这样的分布，称奇点为**中心**．

此时，由β的符号来确定轨线方向．当$\beta < 0$时，轨线的方向是逆时针的；当$\beta > 0$时是顺时针的（见图6.11及图6.12）．

$\beta < 0$

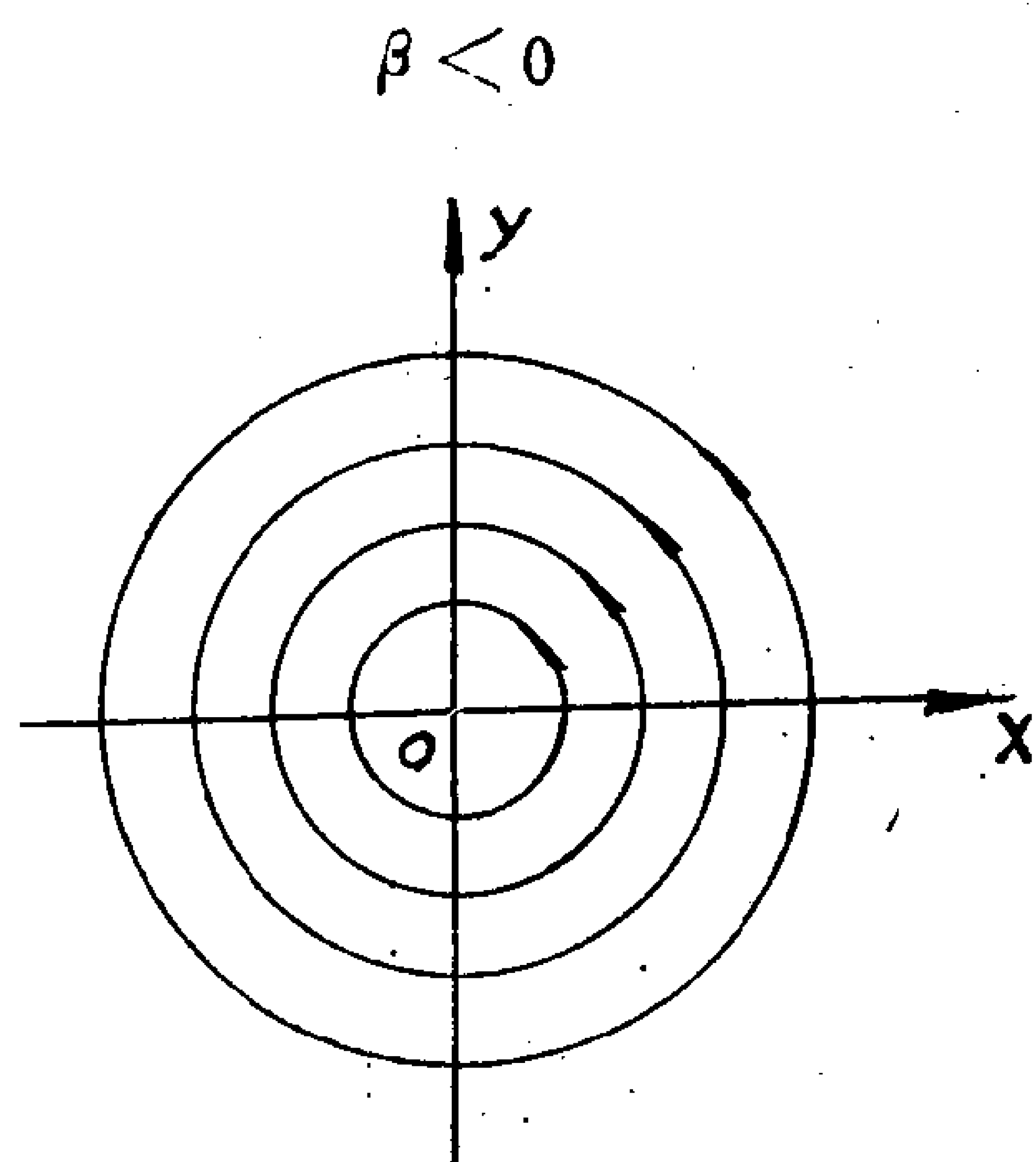


图 6.11

$\beta < 0$

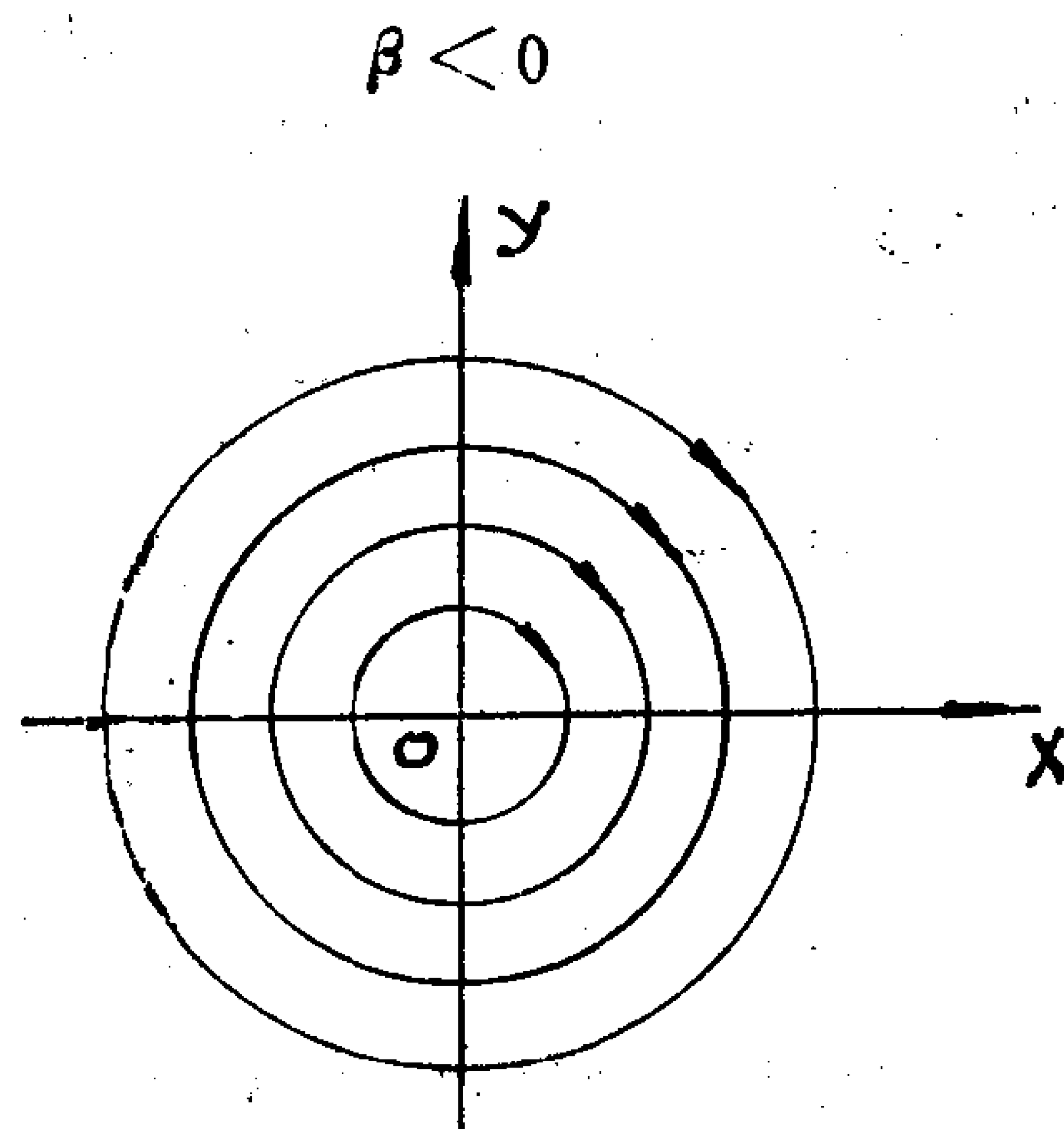


图 6.12

综上所述，方程组

$$\frac{dX}{dt} = AX \qquad (6.6)$$

经过线性变换$\widetilde{X} = TX$，化成标准型

$$\frac{d\widetilde{X}}{dt} = J\widetilde{X}. \qquad (6.7)$$

由于A的特征根的不同，方程(6.7)（亦即方程(6.7)′）可能出现四种类型：结点型，

鞍点型，焦点型，中心型；并且特征根实部的符号，决定着相点沿轨线的走向，即确定着奇点的稳定性．

（2）轨线结构的不变性

我们自然会想到：既然方程组(6.7)是方程组(6.6)′(亦即(6.6))经过非奇异线性变换的结果，那么通过逆变换T^{-1}，从方程组(6.7)在奇点附近的轨线分布，也应该能清晰地了解(6.6)在奇点附近的轨线分布情况．

下面从几何学来研究，经过线性变换T^{-1}后，方程(6.7)的轨线将产生的变化．

因为T是非奇异变换，所以T^{-1}也是非奇异变换，正如解析几何学中知道的那样，非奇异变换是一个仿射变换．而经过仿射变换后的图形，只是相当于在某个方向拉长，在某一个方向压缩的变化．也就是经过仿射变换T^{-1}之后，具有下述不变性：

1）　坐标原点不变；

2）　直线变成直线；

3）　如果曲线$(x(t),\ y(t))$当$t\to+\infty$（或$t\to-\infty$）时趋向原点，变换后的曲线$(\tilde{x}(t),\ \tilde{y}(t))$，当$t\to+\infty$的（或$t\to-\infty$）时也趋向坐标原点；

4）　如果曲线$(x(t),\ y(t))$当$t\to+\infty$(或$t\to-\infty$)时，盘旋地趋向原点，变换后的曲线$(\tilde{x}(t),\ \tilde{y}(t))$当$t\to+\infty$（或$t\to-\infty$）时也盘旋地趋向原点．

5）　闭曲线$(x(t),\ y(t))$经过变换后，所得曲线$(\tilde{x}(t),\ \tilde{y}(t))$仍为闭曲线．

由此可见，方程(6.7)在各种情况下的轨线，经过线性变换T^{-1}后得到方程(6.6)的轨线，其结点型，鞍点型，焦点型，以及中心型的轨线分布是不变的．这就是轨线结构的不变性．

并且由于变换后轨线趋向原点的方向不变，所以结点、焦点的稳定性也不改变．

（3）二阶线性系统的奇点分类

从轨线的结构不变性知道，方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}\tag{6.6}$$

在奇点附近的轨线分布，根据特征根的不同情况有四种类型．总结如下：

- 实根
  - 相异(非零)实根
    - 同号……结点
    - 异号……鞍点
  - 重(非零)实根
    - 临界结点
    - 退化结点
- 复根
  - 实部不为零……焦点
  - 实部为零………中心

从上面对于轨线方向的讨论知道，经过线性变换T^{-1}之后，轨线的方向不变．由此，关于结点、焦点的稳定性总结如下：

1）　二特征根的实部均为负数时，奇点是稳定的（把实数看成虚部为零的复数）．

2）　二特征根的实部均为正时，奇点即为不稳定的．

例如质点在有阻尼介质中的自由振动，其方程为

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+kx=0 \quad .$$

化成方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-kx-2ny,\end{cases}$$

此系统的系数阵A为

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -k & -2n\end{pmatrix}.$$

点（0，0）为系统的唯一奇点．系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -k & -2n-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2n\lambda+k=0,$$

特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2n\pm\sqrt{4n^2-4k}}{2}=-n\pm\sqrt{n^2-k} \quad .$$

因为阻尼系数$n>0$，恢复系数$k>0$，所以特征根的实部均为负．也就是不管奇点是结点还是焦点，它们都是稳定的．当$t\to+\infty$时，所有轨线上的点都趋于奇点(0,0)．也就是任何一个运动，当时间无限延续下去，运动就趋于平衡位置（0，0）．而原点对应于$x=0$，$y=0$的解．即运动逐渐静止．它说明了在有阻尼介质中的自由振动都是衰减的，最后达到静止．

下面研究线性系统（6.6）的奇点附近的轨线分布与系数的关系，由此得到，根据方程系数来判定奇点类型的准则．

因为系统(6.6)的奇点类型，决定于系数矩阵的特征根．所以要研究方程的系数与奇点类型的关系，主要研究方程系数与系数矩阵的特征根之间的关系．

方程（6.6）系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0,\text{ 或 }\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \quad .$$

为了书写方便，令

$$\sigma=-(a_{11}+a_{22}),\quad \Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

于是特征方程可写为

$$\lambda^2+\sigma\lambda+\Delta=0 \quad .$$

特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-4\Delta}}{2}.$$

下面就分特征根为相异实根，重根及复根三种情况加以研究：

1）$\sigma^2-4\Delta>0$

i）$\Delta>0$

$\left.\begin{array}{l}\sigma<0\ \text{二根同正}\\ \sigma>0\ \text{二根同负}\end{array}\right\}$ ……奇点为结点

ii) $\Delta<0$ 二根异号……奇点为鞍点

2) $\sigma^2-4\Delta=0$

$\left.\begin{array}{l}\sigma<0\ \text{正的重根}\\ \sigma>0\ \text{负的重根}\end{array}\right\}$ ……奇点为临界结点或退化结点，

3) $\sigma^2-4\Delta<0$

$\sigma\neq0$ 复数根的实部不为零，奇点为焦点

$\sigma=0$ 复数根的实部为零，奇点为中心.

综合上面的结论，曲线 $\sigma^2=4\Delta$，Δ 轴及 σ 轴把 $\sigma O\Delta$ 平面分成几个区域，不同的区域，对应着不同类型的奇点.

又因为奇点的稳定性主要取决于特征根实部是否为负，而两个特征根实部均为负的充要条件为

$$\sigma>0, \quad \Delta>0.$$

因此，图6.13的各个区域分别表示出了稳定与不稳定的区域.

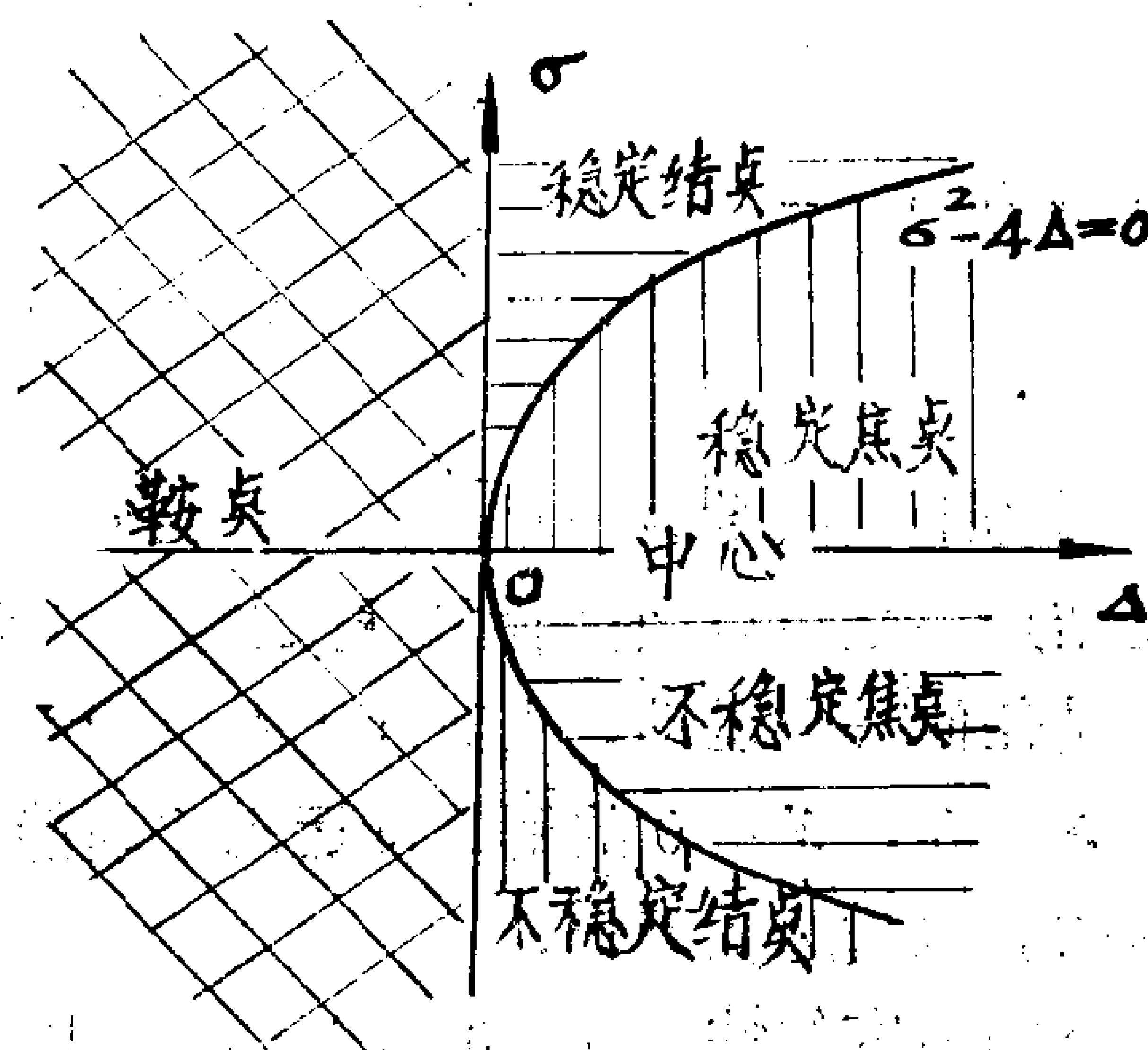


图 6.13

至此可以看到，奇点的类型完全由判别式 $\sigma^2-4\Delta$ 及 σ，Δ 的符号而定. 由此也可以看到作为初等代数的一个基础知识的判别式 $\sigma^2-4\Delta$，却成了近代微分方程理论的有力工具.

3°二阶系统在奇点附近的轨线分布

现在我们研究一般的二阶系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases} \tag{6.1}$$

在奇点附近的轨线分布. 这里只把定理给出，而不加证明.

设 (x_0,y_0) 是方程组(6.1)的奇点，即 $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$，可以假定奇点就是原点，这不失为一般性. 因为如果不然，总可以通过变换

$$x=x_0+x', \quad y=y_0+y'$$

化成这种情形.

以后只研究方程（6.1）在奇点（0，0）附近的轨线分布.

如果对方程（6.1），有

$$P(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+\varphi(x,y)$$
$$Q(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+\psi(x,y).$$

其中

$$\lim_{x^2+y^2\to 0}\frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\quad \lim_{x^2+y^2\to 0}\frac{\psi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

即方程（6.1）可写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+\varphi(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+\psi(x,y).\end{cases}\tag{6.17}$$

我们把方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y.\end{cases}\tag{6.18}$$

称为微分方程（6.1）的**一次近似**。

定理6.1（*Perron*）在方程（6.1）的一次近似方程（6.18）中，如果

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

且方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

的根 λ_1，λ_2 的实部不为零，则方程（6.1）在奇点（0，0）附近的轨线分布与一次近似的轨线分布是相同的．并且奇点的稳定性也是相同的．

这个定理告诉我们，当一近似方程的奇点是结点，鞍点和焦点时，方程（6.1）对应的奇点和它一次近似方程的奇点类型相同．而当一次近似方程的奇点为中心时方程（6.1）对应的奇点类型就不能确定了．它可能是焦点，也可能是中心．

习　　题 6.1

1．通过求解，确定下列各方程的奇点类型，画出相图，并确定奇点的稳定性：

1）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x,\\ \dfrac{dy}{dt}=-3y.\end{cases}$　　2）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y.\end{cases}$

3）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x.\end{cases}$　　4）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y.\end{cases}$

2．确定下列各方程的奇点类型，轨线分布以及稳定性：

1）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x-4y.\end{cases}$　　2）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-y.\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x-2y.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-y.\end{cases}$

3. 确定下列方程的奇点类型及稳定性：

1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x(a^2-x^2)+by.\end{cases}$ $a,b\neq 0$

2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-ay+b\sin x.\end{cases}$ $a>0$，$b>0$

§6.2 极　限　环

在本章第一节所提到的线性无阻尼振荡，由于它的所有解都是周期解，系统的轨线都是闭轨，是层层相套的椭圆族．它们在相平面上是密集的．

但是在非线性振动中，由于阻尼力与恢复力的非线性性质，系统有时存在**孤立的周期解**．反映在相平面上，系统存在孤立的闭轨．这就是我们要研究的**极限环**．由于这种轨线的特殊性质，在轨线结构中处于重要地位．对它的研究，在理论上和实践中都是很重要的．

1°．极限环概念及研究方法

例1．考察方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x(x^2+y^2-1)\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y(x^2+y^2-1)\end{cases}\tag{6.19}$$

的轨线分布．

解．作极坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

为此先将方程（6.19）的第一个方程两端乘x，第二个两端乘y，然后相加，得到

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dx}{dt}=-(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),\tag{6.20}$$

由于$x^2+y^2=r^2$，并微分之，则得

$$r\frac{dr}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}.$$

所以，（6.20）可写成

$$r\frac{dr}{dt}=-r^2(r^2-1),$$

或
$$\frac{dr}{dt}=-r(r^2-1)\ ,\tag{6.21}$$

其次，将方程组（6.19）的第一个方程乘以 y，第二个方程乘以 x，然后相减，得

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=-(x^2+y^2).$$

由于 $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，并微分之，可知

$$\frac{d\theta}{dt}=1\tag{6.22}$$

于是原方程（6.19）经变换后化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=-r(r^2-1)\\[2mm]\dfrac{d\theta}{dt}=1\end{cases}\tag{6.23}$$

积分所得方程（6.23）．易于看出，方程组（6.23），有两个解：

$$r=0\ ,\qquad\qquad r=1$$

其中 $r=0$ 是方程的奇点，而 $r=1$ 是方程的周期解，它所对应的闭轨是以原点为中心，以1为半径的圆．

进一步求方程组的通解，得

$$\begin{cases}\dfrac{r^2}{1-r^2}=Ae^{2t}\\[2mm]\theta-\theta_0=t\ ,\end{cases}\qquad\qquad A=\frac{r_0^2}{1-r_0^2}$$

或为

$$\begin{cases}r^2=\dfrac{Ae^{2t}}{Ae^{2t}-1}\\[2mm]\theta-\theta_2=t\ .\end{cases}$$

于是方程（6.19）的轨线分布如图（6.14）

从方程组（6.19）的相图上看出，轨线分布是这样：

（i）（0，0）为奇点，$x^2+y^2=1$ 为一孤立闭轨．

（ii）在闭轨 $x^2+y^2=1$ 的内部和外部的轨线，当 $t\to+\infty$ 时都分别盘旋地趋近于闭轨．

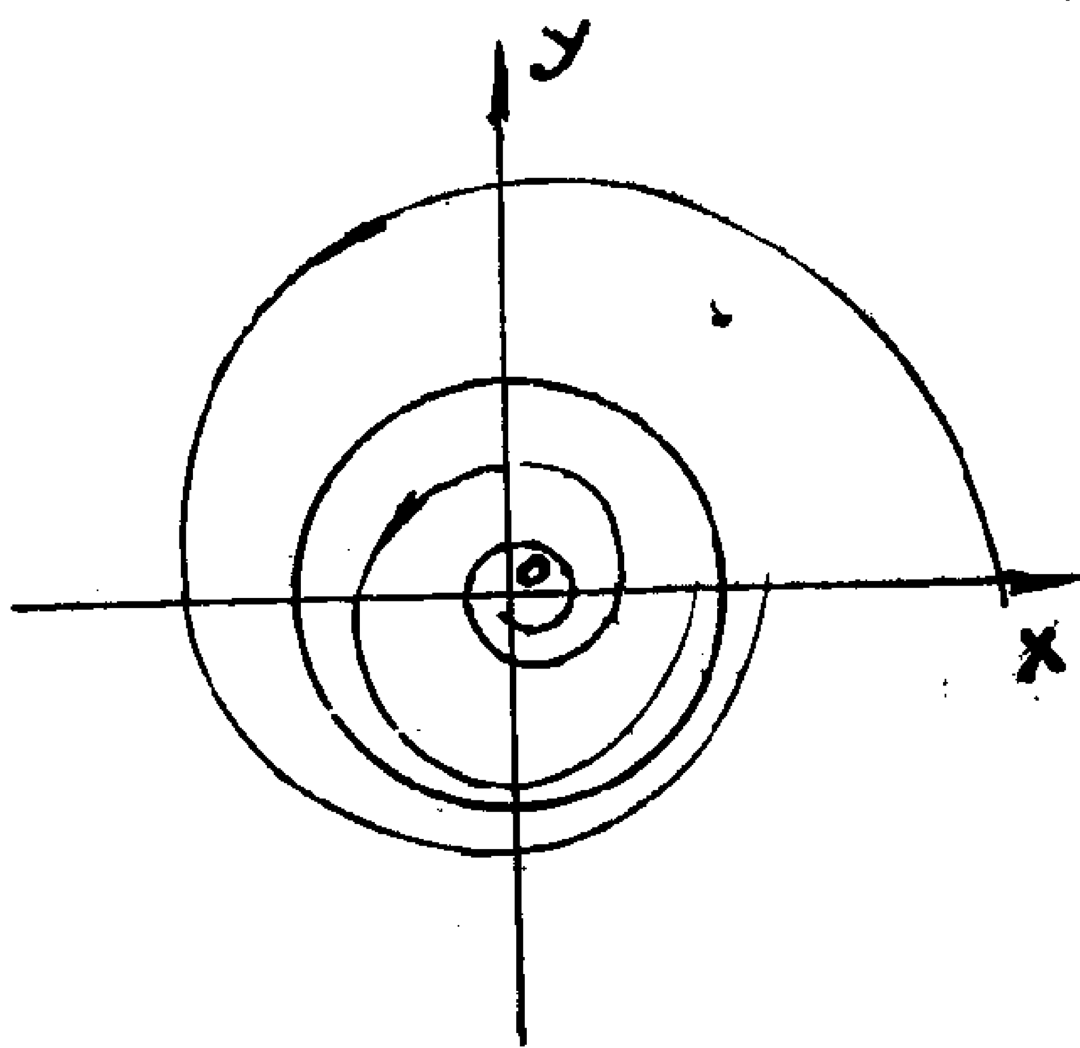


图 6.14

定义6.3 方程组（6.1）的**孤立周期解**，叫做方程组的**极限环**．

在相平面上，极限环就是孤立的闭轨．在方程（6.19）中，孤立闭轨 $x^2+y^2=1$ 就是方程的极限环．

下面我们不加证明地，叙述一个极限环附近轨线的性质：

极限环这个闭轨 K，把相平面分成两个区域：内域和外域．因为方程组（6.1）的

轨线是不交的，所以闭轨把轨线分成两个部分：一部分轨线在K的内部，一部分轨线在K的外部．内部和外部靠近K的轨线的性态有两种可能．以内部轨线而言，所有靠近K的轨线，或者当$t\to+\infty$时，盘旋地趋近于K，或者是当$t\to-\infty$时，盘旋地趋近于K．外部的轨线也有相同性质．

如果所有靠近K的内部的和外部的轨线，当$t\to+\infty$时都盘旋地趋近于K，**极限环K叫做稳定的**．如果所有靠近K的内部或外部轨线，当$t\to-\infty$时盘旋地趋近于K，称**极限环K为不稳定的**．如果靠近K的内部轨线，当$t\to-\infty$时盘旋地趋近于K，而靠近K的外部轨线当$t\to+\infty$时盘旋地趋近于K，或者相反，则称此**极限环为半稳定的**．

方程（6.19）的极限环$x^2+y^2=1$，就是稳定的极限环．

由上面的讨论可知，极限环是孤立的闭轨，是其附近的轨线的极限点集，它是轨线结构中的特殊要素．为了弄清系统轨线结构，除了弄清系统的奇点类型，还要确定系统的极限环和分界线．就是要判断系统是否存在极限环，以及它们的大致位置．因此，从理论上来看极限环问题是很重要的．而在实际应用中，如果系统存在极限环，就说明这个系统存在周期振荡．特别是，当这个系统存在稳定极限环时，则存在平稳的周期振荡．这在无线电通讯中是极为重要的．

在当前的定性理论的研究工作中，极限环仍然是大家注意的中心．

下面给出一个研究极限环的例子，它是在有电子管的迴路中，描述电流状态的微分方程，叫做**范得坡（*Van der Pol*）方程***，在历史上也是有名的．

例．研究方程

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0\quad(\mu>0)\tag{6.24}$$

的极限环．

解．将方程化成方程组．

设 $\dot{x}=v$，则为

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=-x-\mu(x^2-1)v\end{cases}\tag{6.25}$$

由其一次近似

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=-x+\mu v\end{cases}\tag{6.25}$$

知原点为唯一奇点，且

$$\sigma=-\mu,\ \Delta=1,\ \sigma^2-4\Delta=\mu^2-4.$$

因此，　如$\mu\geqslant2$时，原点为不稳定结点；

　　　　如$\mu<2$时，原点为不稳定焦点．

总之，原点附近的轨线当t增大时，都远离原点．

为了处理方便，令

$$F(x)=\int_0^x\mu(x^2-1)dx=\mu\left(\frac{1}{3}x^3-x\right),$$

* 参看秦元勋著《微分方程所定义的积分曲线》第三章 251 页．

作代换，令

$$y = v + F(x).$$

于是，
$$\dot{y} = \dot{v} + \mu(x^2-1)v = -x - \mu(x^2-1)v + \mu(x^2-1)v = -x.$$

方程（6.25）可化成

$$\begin{cases} \dot{x} = -F(x) + y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{6.27}$$

下面将证明方程（6.27）存在一个稳定的极限环．

对于（6.27），曲线

$$y = F(x)$$

称为**特性曲线**（或垂直等倾线），因为在 $x>0$ 半平面中特性曲线上的任一点，方向场的向量都有 $\dot{x}=0$，$\dot{y}<0$，所以特性曲线上任一点的轨线都是由上方穿向下方的．在 $x<0$ 半平面中，则相反．

现在研究过 y 轴正半轴上任一点 $A(0, a)(a>0)$ 的轨线的走向．在点 A 处因 $\dot{x}=a$，$\dot{y}=0$．由于 $a>0$，知轨线上的点向右侧移动，进入 $x>0$ 的区域后，因为 $\dot{y}=-x<0$，y 减小，而在曲线 $y=F(x)$ 的上方，因为 $-F(x)+y>0$ 所以 $\dot{x}>0$．从而 x 增加，相点（x，y）向右下方移动．

我们来证明在有限时间里，轨线能达到特性曲线上．设 $t=t_0$ 时轨线过 A 点，可以取得小数 $\delta>0$，使在 $t=t_0+\delta$ 时有 $x(t_0+\delta)>0$，如果轨线总在 $y=F(x)$ 的上方，因 $t\geqslant t_0+\delta$ 时，$x\geqslant x(t_0+\delta)>0$，从而

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0+\delta) + \int_{t_0+\delta}^{t} y'(s)\,ds \\ &= y(t_0+\delta) + \int_{t_0+\delta}^{t} [-x(s)]\,ds \\ &\leqslant y(t_0+\delta) - x(t_0+\delta)[t-(t_0+\delta)]. \end{aligned}$$

由此可知，当 t 无穷大时，$y(t)$ 必到达 $y=F(x)$ 的下方．这说明轨线上的点，在有限的时间内一定能到达特性曲线上．设当 $t=t_1$ 时到达特性曲线上的点为 $C(u, v)$．

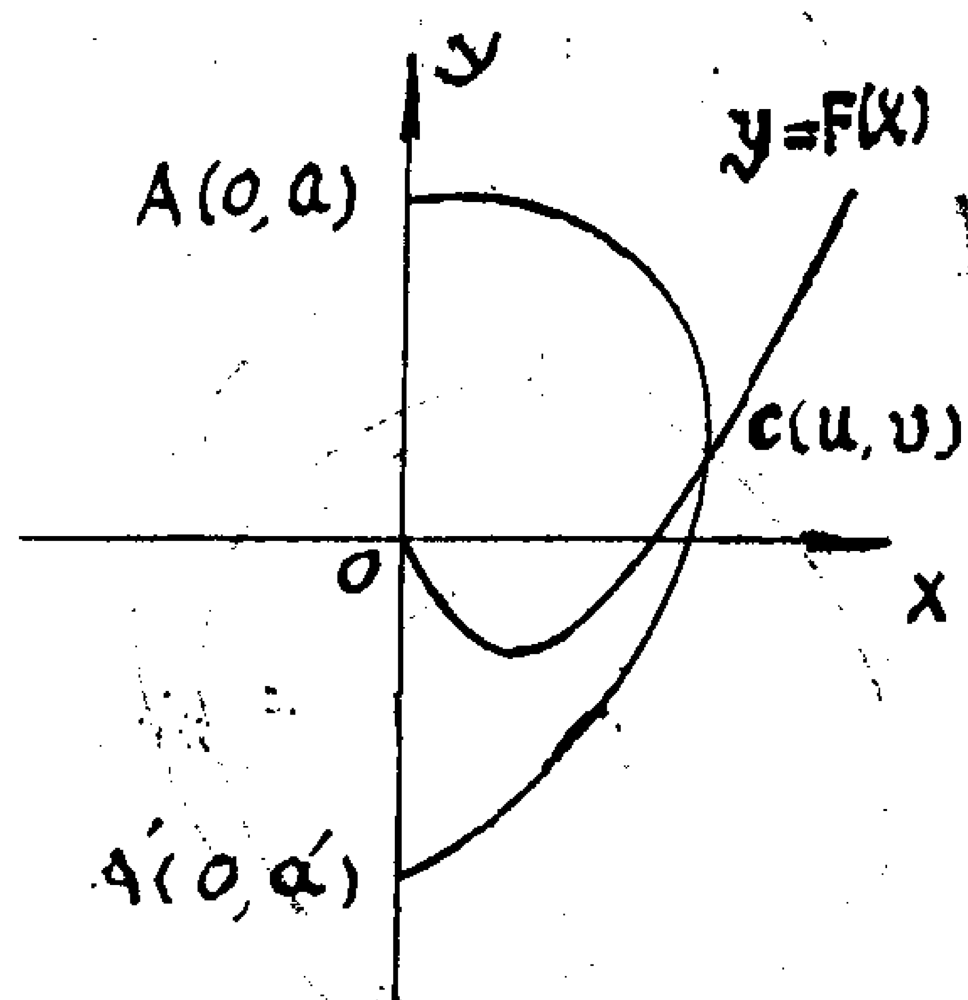


图6 1.5

在特性曲线的下方，因为 $-F(x)+y<0$，所以 $\dot{x}<0$，因此 x 是减小的．此外，在 $x>0$ 范围内，因 $\dot{y}=-x$，所以 y 也是减小的．因此轨线上的点向左下方移动．另外，在 $x>0$ 的区域内，因为轨线都是从上往下穿过特性曲线的，因此轨线进入特性曲线下方区域后，再不能与特性曲线相交．

为了证明在有限时间里，轨线上的点能到达 y 轴的负半轴．首先证明轨线上的点能够到达 y 轴．假如存在如此的 $x_0>0$，使得永远有 $x(t)\geqslant x_0>0$，则有

$$y(t)=y(t_1)+\int_{t_1}^{t}[-x(s)]ds$$
$$\leqslant y(t_1)-x_0(t-t_1),$$
于是有 $y(t)\to-\infty$，又 $F(x)$ 在 $[0,u]$ 上有界，设 $|F(x)|\leqslant m$，如 $t\geqslant t'_1$ 时有 $y(t)\leqslant-2m$，则有

$$x(t)=x(t'_1)+\int_{t'_1}^{t}[-F(s)+y(s)]ds$$
$$\leqslant x(t'_1)-m(t-t'_1),$$
当 t 充分大时，$x(t)$ 必将为负，矛盾.

由此可知，不可能存在 $x_0>0$，使得永远有 $x(t)\geqslant x_0$.

因为轨线在特性曲线下方，轨线上的点必能到达 y 轴的负半轴，设为 $A'(0,a')$ $a'<0$.

因为在点 $A'(0,a')$ 处，$-F(x)+y=a'$，沿这条轨线就存在时刻 t''_1，当 $t\geqslant t''_1$ 时有 $-F(x)+y<\frac{a'}{2}$，于是

$$x(t)=x(t''_1)+\int_{t''_1}^{t}[-F(x(s))+y(s)]ds$$
$$\leqslant x(t''_1)+\frac{a'}{2}(t-t''_1).$$

可知在有限时间内，轨线上的点即能到达点 $A'(0,a')$ 处，设到达的时刻为 t_2.

通过上面一系列的讨论知道，在 $t=t_1$ 时刻通过 y 正半轴上的 $A(0,a)(a>0)$ 的轨线，经过有限时间之后，于 $t=t_2$ 时刻即到达 y 的负半轴 $A'(0,a')$ 处.

在方程（6.27）中，由于 $F(x)$ 是奇函数，x 与 y 同时改变符号成为 $-x$ 与 $-y$ 时，得到的方程与原方程相同. 因此，从 y 轴正向任一点出发到达 y 轴负向的轨线的一段，它关于原点对称的曲线也必是轨线的一段.

所以，上面在 $x>0$ 范围内进行的研究，从负 y 轴向 $A'(0,a')$ 出发，在 $x<0$ 范围内也有同样的过程，轨线再一次到达 y 轴的 $y>0$ 部分. 如果 $a'=-a$，这条轨线就到达了 A 点，即为闭轨，也就得到了周期解.

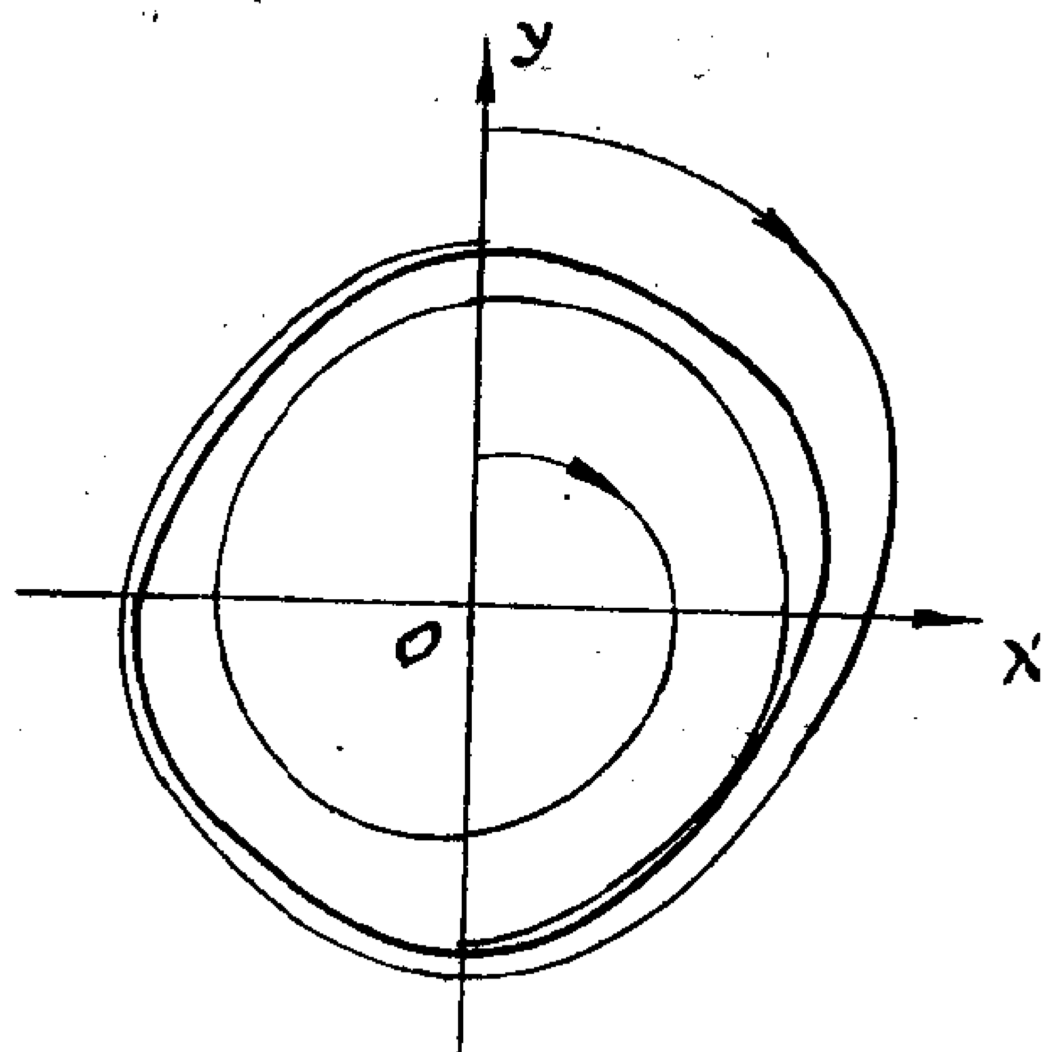


图 6.16

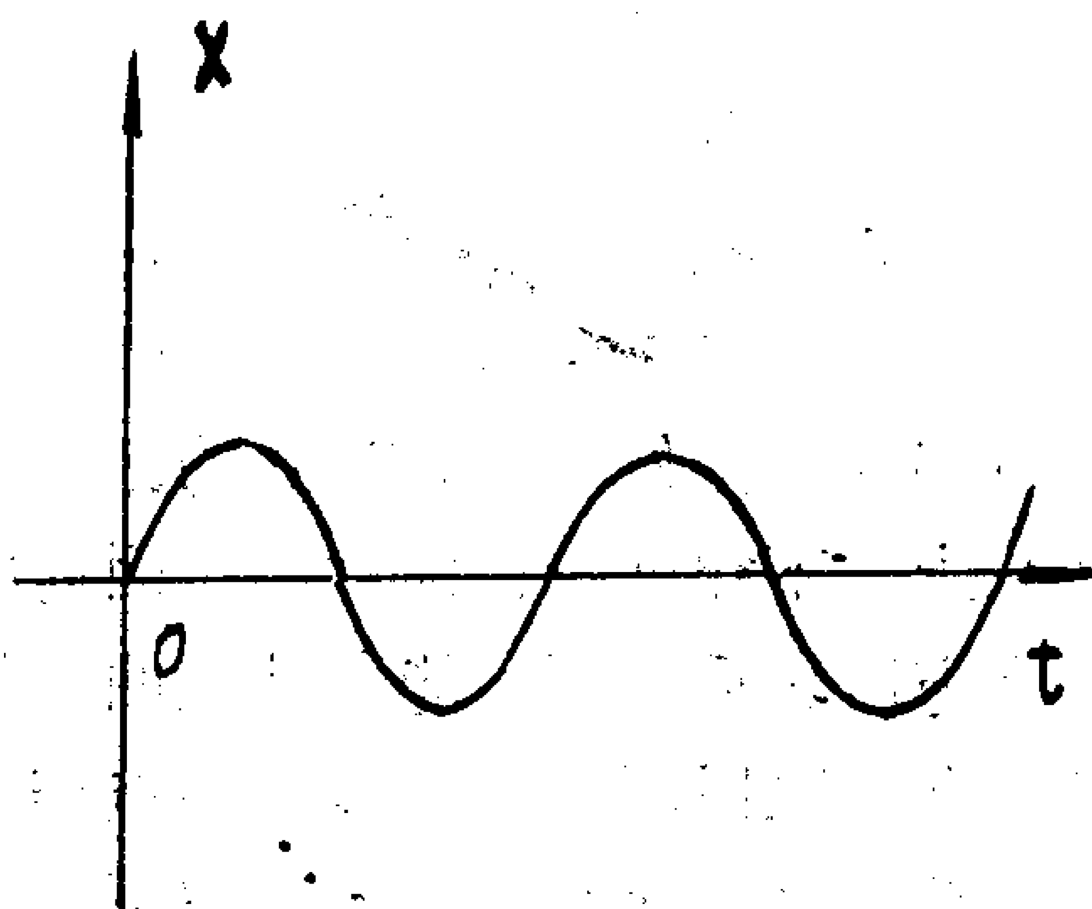


图 6.17

为了证明，使 $a'=-a$ 的点 $A(0,a)$ 存在，考察下面的函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ . \tag{6.28}$$

对于方程（6.27），这个函数叫做能量函数．用它来证明闭轨的存在性．

现在令 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 为（6.27）的一个解，把它代入（6.28)后，对于 t 求导数，则得

$$\frac{d}{dt}V(x(t),y(t))=\dot{V}_x\dot{x}+\dot{V}_y\dot{y}$$
$$=x(-F(x)+y)+y(-x)=-xF(x).$$

因此，沿着上述轨线的一段 $A-C-A'$，研究下面的积分．

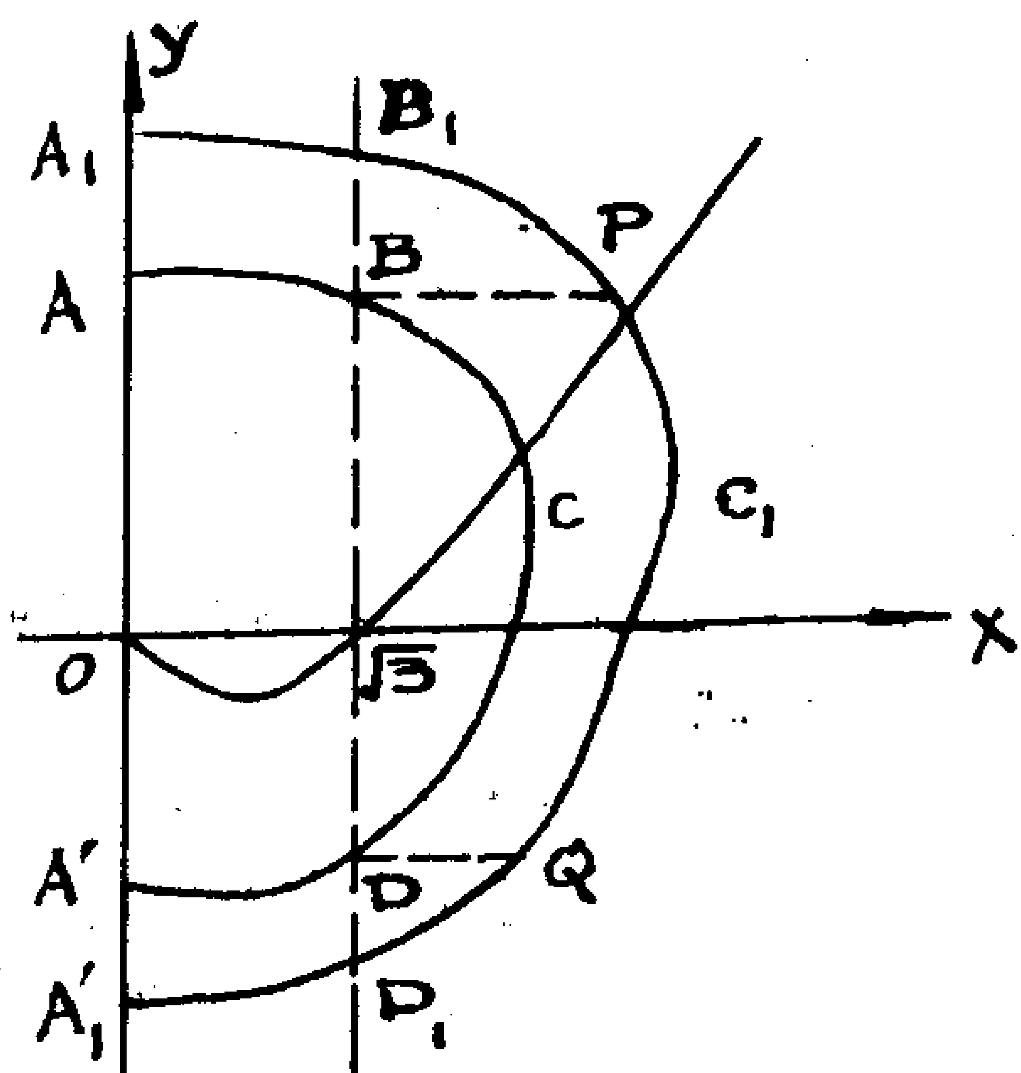


图　6.18

$$\Phi(u)=\int_{A-C-A'}F(x)dy$$
$$=\int_{t_0}^{t_2}F(x(t))\dot{y}(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_2}F(x(t))(-x(t))dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_2}\frac{d}{dt}V(x(t),y(t))dt=V(A')-V(A)$$
$$=\frac{1}{2}a'^2-\frac{1}{2}a^2\ .$$

因为轨线与特性曲线的交点 $C(u,v)$，决定这个积分值，所以把它写成 u 的函数 $\Phi(u)$．$\Phi(u)$ 是 u 的连续函数，并且在 $0<u<\sqrt{3}$ 上，因 $0<x<u$，$F(x)<0$，可知 $\Phi(u)>0$．

$u>\sqrt{3}$ 时，如图6.18，取两条轨线：

$$A-B-C-D-A'$$
$$A_1-B_1-C_1-D_1-A_1'$$

因为在轨线上 $dy<0$，且在 $F(x)<0$，$y-F(x)>0$ 的情况下，$y-F(x)$ 在 $\widehat{A_1B_1}$ 上的值较在 $\widehat{AB}$ 上大，有

$$\int_A^B F(x)dy=\int_0^{\sqrt{3}}F(x)\frac{dy}{dx}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{-xF(x)}{y-F(x)}dx>\int_{A_1}^{B_1}F(x)dy.$$

又在同一 y 值处，$\widehat{PQ}$ 上的 $F(x)$ 值大，且在 $\widehat{B_1P}$ 和 $\widehat{QD}_1$ 上和 $F(x)>0$，有

$$\int_B^D F(x)dy>\int_P^Q F(x)dy>\int_{B_1}^{D_1}F(x)dy.$$

在 $F(x)<0$，$y-F(x)>0$ 的情况下，$y-F(x)$ 的绝对值在 $\widehat{D_1A_1'}$ 上的大，有

$$\int_D^{A'}F(x)dy>\int_{D_1}^{A'_1}F(x)dy.$$

由此可知，$\Phi(u)>\Phi(u_1)$，因此在$\sqrt{3}<u<+\infty$上$\Phi(u)$是减函数．再有，因为积分$\Phi(u)$的一部分$\int_P^Q F(x)dy$越往右方的轨线的绝对值越大，而且可以任意大，所以有

$$\lim_{u\to+\infty}\Phi(u)=-\infty.$$

根据上面的讨论，可知存在唯一的u_0，使得

$$\Phi(u_0)=0.$$

在这个点上有$a=-a'$，所以轨线是闭轨．

从前面对轨线的分析中，又可以看出，闭轨的内部轨线和外部轨线，当$t\to+\infty$时都盘旋地趋近此闭轨．因此这唯一的极限环是稳定的．

（证毕）

一个系统存在稳定的极限环，说明这个系统存在着平稳的周期振荡．在无线电通讯中这是非常重要的．第四章对 RLC 电路的研究中，我们导出线性方程 $L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{Q}{C}=0$，这种系统是不存在周期解的．实际上 *van der Pol* 方程是把一个具有负阻抗的线性系统$\ddot{x}-\mu\dot{x}+x=0$，加上一个与$x^2\dot{x}$成正比的阻抗，从而构成了一个非线性系统，在负阻抗的线性系统中，当$t\to+\infty$时解无限增大，但加上$\mu x^2\dot{x}$之后，如果解无限增大，数值就会受到控制，就使周期解存在成为可能．

2°．周期解存在与不存在的判别法．

对于二维自治系统，定性理论中最重要的定理是判别周期解存在的邦加莱——本狄克生（*Poincar'e—Bendixson*）环域定理．如果能作出*Poinca e—Bendixson* 环域，就能断定系统在这个环域内存在周期解．这个判别定理在理论上和实践中意义都是很大的．下面就来介绍周期解存在和不存在的几种判别法．

定理6.2 （环域定理）对于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y),\end{cases}\tag{6.1}$$

如果存在两个闭曲线C_1，C_2，它们围成一个环形区域（如图6.19），具有下面性质：

1） 由方程组（6.1）所确定的向量场，在C_1上的点，向量场的方向由C_1外部指向C_1内部（由内部指向外部）．

2） 在C_2上的点，向量场的方向由C_2内部指向C_2的外部（由外部指向C_2的内部），则在此环域内，方程组（6.1）必至少存在一个周期解．

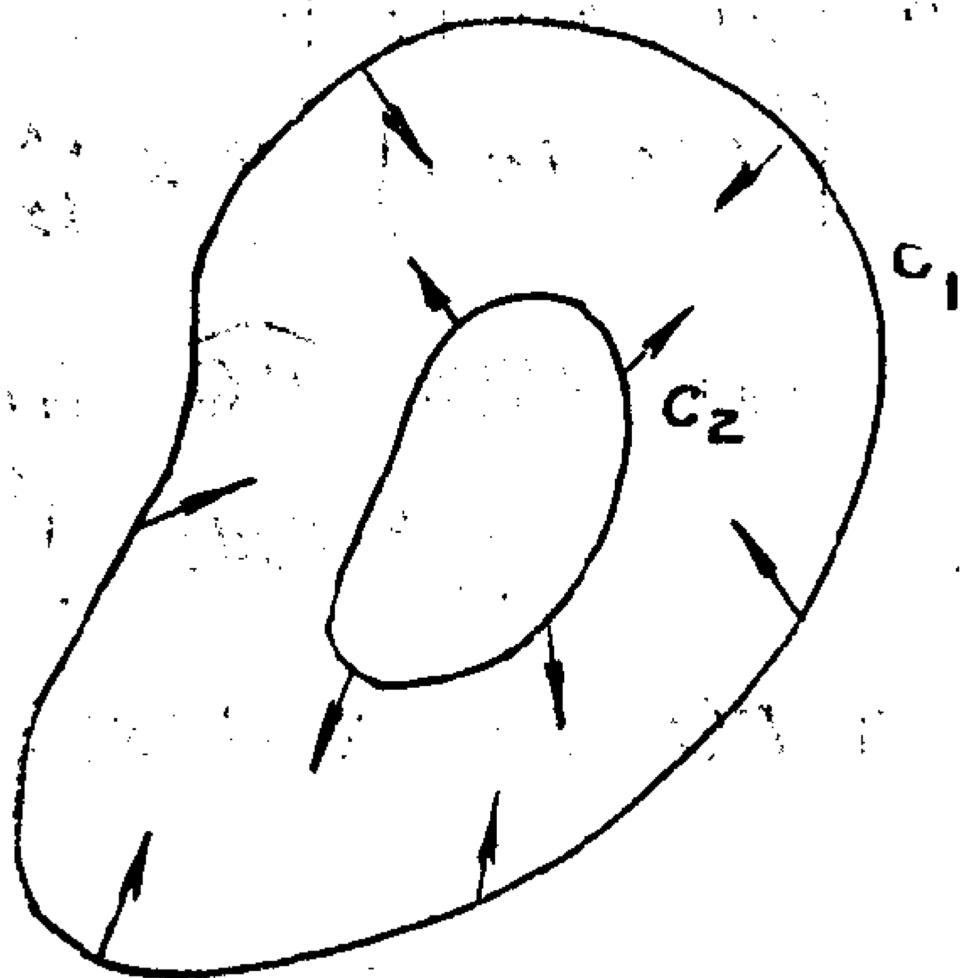


图 6.19

推论6.1 如果在闭曲线C内，方程组（6.1）只有一个不稳定奇点；且在C上的点，方程(6.1)

向量场的方向由C的外部指向内部，则在C内方程组（6.1）存在周期解.

对以上定理和推论不作证明.

定理6.3（对称性原理） 设方程组（6.1）满足

$$P(x,y)=P(-x,y),\quad -Q(x,y)=Q(-x,y),$$

且原点为y轴上的唯一奇点. 如果存在轨线L从正y轴出发到负y轴上，则轨线L必为闭轨. 又如果原点附近的轨线都具有这一性质，则原点必为中心.

证明 由于已知条件可知方程组的向量场对于y轴对称. 所以L和它关于y轴对称的曲线，构成一条单闭曲线，此闭曲线为方程的轨线. 于是方程有闭轨.

又如，原点附近的轨线都具有这样的性质，则原点附近呈现中心型的分布，故原点为中心.

定理6.4（*Bendiuson*） 如果在单连通区域D内，方程组右端函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$有连续编导数$\frac{d\varrho}{xe}$及$\frac{\partial Q}{\partial y}$，又

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

在D内保持定号，且不恒为零，则在D内方程组（6.1）不存在周期解.

证明 假如定理不成立，方程组(6.1)在D内存在闭轨L（它和它的内部区域都在D内），于是由格林公式有

$$\oint_L P\,dy-Q\,dx=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

因为在轨线上处处有$P\,dy=Q\,dx$，所以从上式左端来看，左边的曲线积分应为零. 但从右端来看，被积函数在S上保持定号，且不恒为零. 所以右端的二重积分不为零. 矛盾.（证毕）

例 廉纳（*Liénard*）方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0. \tag{6.28}$$

如果$f(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$上符号不变，且不恒为零，则在区域D：$\{a\leqslant x\leqslant b, -\infty<y<+\infty\}$上，方程不存在周期解.

证明 将方程（6.28）化成方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-f(x)y-g(x),\end{cases} \tag{6.29}$$

即 $P(x,y)=y,\quad Q(x,y)=-f(x)y-g(x),$

因为

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=-f(x)$$

在区域D上不变号，且不恒为零，故方程（6.28）在D上没有周期解.

习 题 6.2

1. 确定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}[1-(x^2+y^2)],\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}[1-(x^2+y^2)].\end{cases}$$

的极限环及其稳定性.

2. 对于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1).\end{cases}$$

确定极限环及其稳定性.

3. 对于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2-1)^2+y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2-1)^2-x.\end{cases}$$

确定极限环及其稳定性.

4. 对于方程 $a\ddot{x}+b(x^2-1)\dot{x}+cx=0$ 作变换，使其成为 *van der pol* 方程，其中 $a>0$，$b>0$，$c>0$.

§6.3 李雅普诺夫稳定性

稳定性是微分方程解的一种性质．为了使这一概念具体化，我们从某些系统的实际工作情况谈起．一些机械的或电的装置（机器，仪器）的工作，是用常微分方程组来描述的．正如我们知道的那样，常微分方程组的解有无穷多个，给定一个初使条件之后，才有一个确定的解．然而实际上，这些由方程组描述的系统，常常是以确定的状态工作的．并且还可以看出，在任何情况下，都不可能出现方程组各种解的无穷多工作状态．这种现象的出现，一种是以确定的方式在选择了解的初始值的情况下，启动设备而得到的．另外，也有在系统持续工作后，初始值的影响消灭了，使装置稳定于一个定常解上．*van der Pol* 方程描述的电路就是这样，从我们的研究来看，知道不论从什么样的初始值出发，经过一段时间之后，能稳定于一个周期解上．

现在具体地通过挂钟的摆动，来说明这种稳定性．不论钟摆在启动时初始偏离大小，和初始速度大小，经过一段时间之后，摆锤的摆动是完全确定的．如果启动时，摆动的初始偏离和初始速度都较小．那么经过不多次的摆动之后，摆锤的摆动就会停下来．如果启动时，初始偏离和初始速度都是足够大，那么经过短时间之后，摆动的振幅将成为完全确定的，而钟将以这个振幅一直走下去．因此挂钟工作的微分方程组有两个

定常解，一个是对应钟不走的情形的平衡位置，另一个是对应钟的正常运行的周期解．而这个方程组所有其它解（无穷多个）很快地趋近这两个定常解中的一个，且在不长的时间后，它们变得实际上没有差别．在这种意义下，所指出的两个定常解都是稳定的。（参看$A.A.$安德罗诺夫等著的《振动理论》一书第三章．）可见，若我们选取的不是定常解，而是在开始时与定常解偏差不大的解，那么所取的非定常解趋于定常解．这就是解的稳定性定义的粗略说法．

从解对初值的连续相依定理，我们知道，在给定有限时间的区间上，如果给定的初始值偏差充分小，解的偏差在整个给定的时间区间上也是小的．解的这种性质并不是稳定性．因为稳定性的要求是只要初始值偏差是小的，解的偏差在**无限长**的时间区间上也是小的．

1°．解的稳定性

考虑一般的微分方程组

$$\dot{x}=F(t,x) \tag{6.30}$$

（x及F均为n维向量），$F(t,x)$为关于x满足李普希兹条件的连续函数．(6.30)的解定义在$[t_0,+\infty)$上．

(6.30)满足$x(t_0)=x_0$的解，用$x(t;t_0,x_0)$表示．

现在给出解的稳定性和渐近稳定的定义．

定义6.4 设解$x=x_0(t)$定义在$[t_0,+\infty)$上，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，和$\tau\geqslant t_0$，存在正数$\delta=\delta(\tau,\varepsilon)$，使得对满足

$$|u-x_0(\tau)|<\delta$$

的所有的u及$t\geqslant\tau$，有

$$|x(t;\tau,u)-x_0(t)|<\varepsilon. \tag{6.31}$$

则称解$x=x_0(t)$是**稳定的**．

进一步，在$x=x_0(t)$是(6.30)的稳定解的情况下，若对于任意$\tau\geqslant t_0$，存在正数$\delta_0=\delta_0(\tau)$，使得对于任意$|u-x_0(\tau)|<\delta_0$，均有

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t;\tau,u)-x_0(t)|=0 \tag{6.32}$$

此时，称解$x=x_0(t)$为**渐近稳定的**．

如$x_0(t)\equiv0$为(6.30)的解，则称它为**零解**．

设$x=x_0(t)$为(6.30)的一个解，如果令

$$F_1(t,x)=-\dot{x}_0(t)+F(t,x+x_0(t))$$

则方程组

$$\dot{x}=F_1(t,x) \tag{6.33}$$

存在零解．方程(6.30)的解$x=x(t)$，与方程(6.33)的解$x=x_1(t)$存在关系

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)$$

所以研究方程(6.30)的解$x=x_0(t)$的稳定性，和研究方程(6.31)的零解的稳定性是一致的．

基于上述原因，以后我们只研究方程的零解稳定性．

2。．李亚普诺夫（ЛяиуноВ）第二方法．

在解决稳定性问题中，李亚普诺夫创造了两种方法，有所谓第一方法和第二方法．在这里我们只介绍第二方法，它也叫做**直接方法**．

这种方法的特点是，研究方程组

$$\dot{x}=F(t,x)$$

零解稳定性时，根据方程的情况，建立一种叫做李亚普诺夫函数的函数$V(t,x)$，用这种函数来判断方程解的稳定性问题．这种方法在理论上与实用上都非常有效．

下面只考虑在二维自治系统中应用李亚普诺夫函数研究零解稳定性的方法．以后都用纯量表达式．

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)\end{cases} \tag{6.34}$$

我们把具有下述性质的函数$V(x_1,x_2)$，称为（6.34）的李亚普诺夫函数：

1） $V(x_1,x_2)$是在原点的邻域上有定义的连续函数；

2） $V(x_1,x_2)$为正定函数，即

$$V(0,0)=0, \quad V(x_1,x_2)>0 \quad (x_1^2+x_2^2\neq 0)$$

3） 当$t\geqslant t_0$时，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2)+\frac{\partial V}{\partial x_2}f_2(x_1,x_2)\leqslant 0$$

最后一条的意思是$x_1=x_2(t)$，$x_2=x_2(t)$是方程组(6.34)的一个解，把$V(x_1,x_2)$沿着轨线行进的方向求导的导数．即

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),x_2(t))=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1(x_1(t),x_2(t))$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_2}f_2(x_1(t),x_2(t))\leqslant 0$$

$\frac{dV}{dt}\leqslant 0$ 说明$V(x_1(t),x_2(t))$对于t来说是非增的．

定理6.5 （稳定性定理）假如原点$O(0,0)$为方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2)\\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2)\end{cases} \tag{6.35}$$

的奇点（说明方程存在零解），且存在李亚普诺夫函数$V(x_1,x_2)$，则（6.35）的零解是稳定的．

证明 由李亚普诺夫函数的条件2）可知，函数$V(x_1,x_2)$存在严格极小值0．因此在此极小值点邻域内，$V(x_1,x_2)=c$的等值线为闭曲线，极小值点（原点）在这个曲线内部（参看图6.20）．

任意给定一个$\varepsilon>0$，当c足够小时，等值线$V(x_1,x_2)=c$就整个地位于原点的邻域之内，并且把原点围在它的里面．因此可以找到一个$\delta>0$，使坐标原点的δ邻域，整个地在闭曲线$V(x_1,x_2)=c$内，而在这个邻域内有$V(x_1,x_2)<c$，如把点取在此

邻域内，$V(x_1(t_0),x_2(t_0))=c_1<c$，则当 $t\geqslant t_0$ 时，由此初始值所确定的轨线 $x_2=x_1(t)$，$x_2=x_2(t)$ 不能越出等值线 $V(x_1,x_2)=c$ 的界线，当然也就不能越出

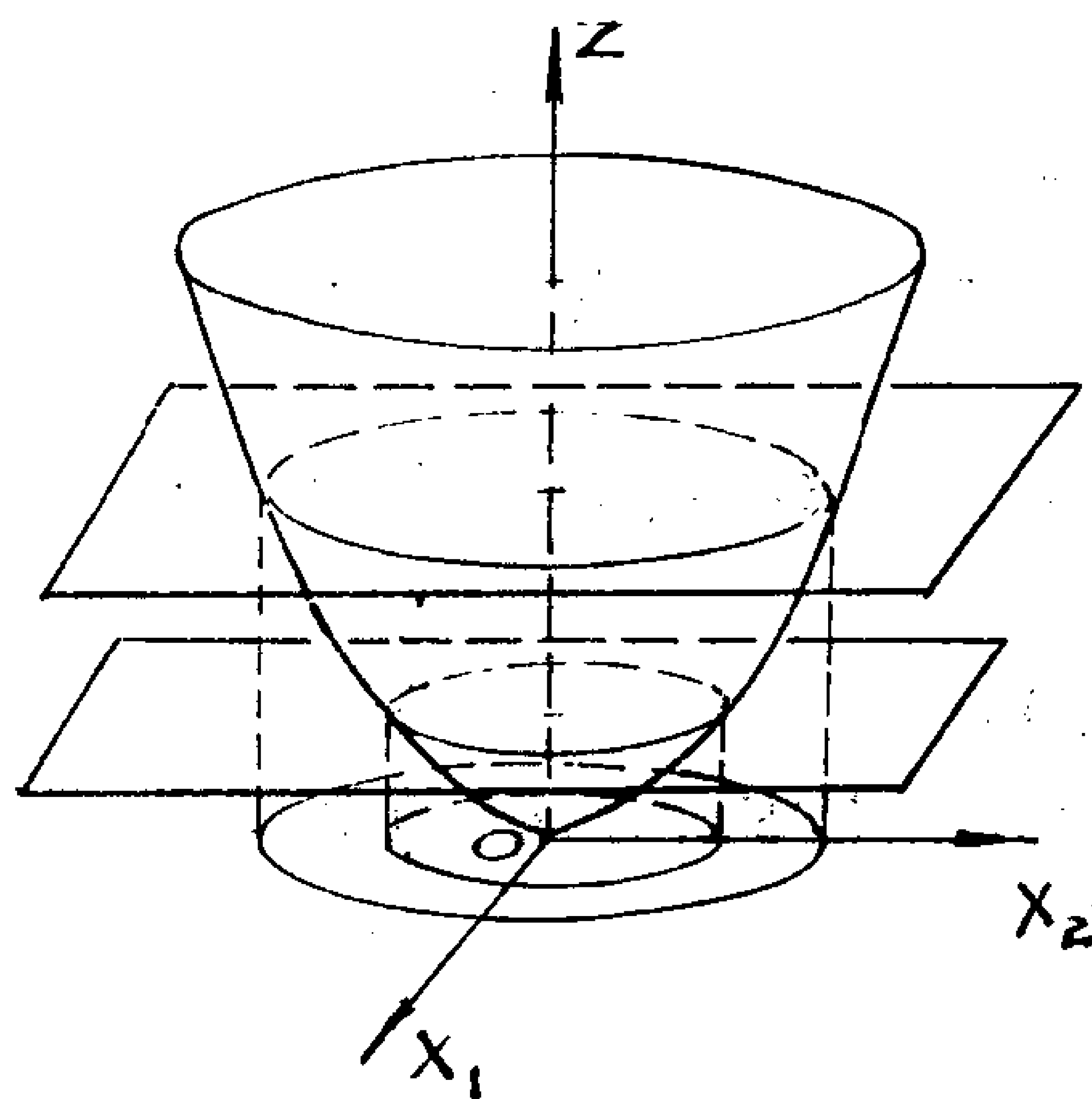


图 6.20

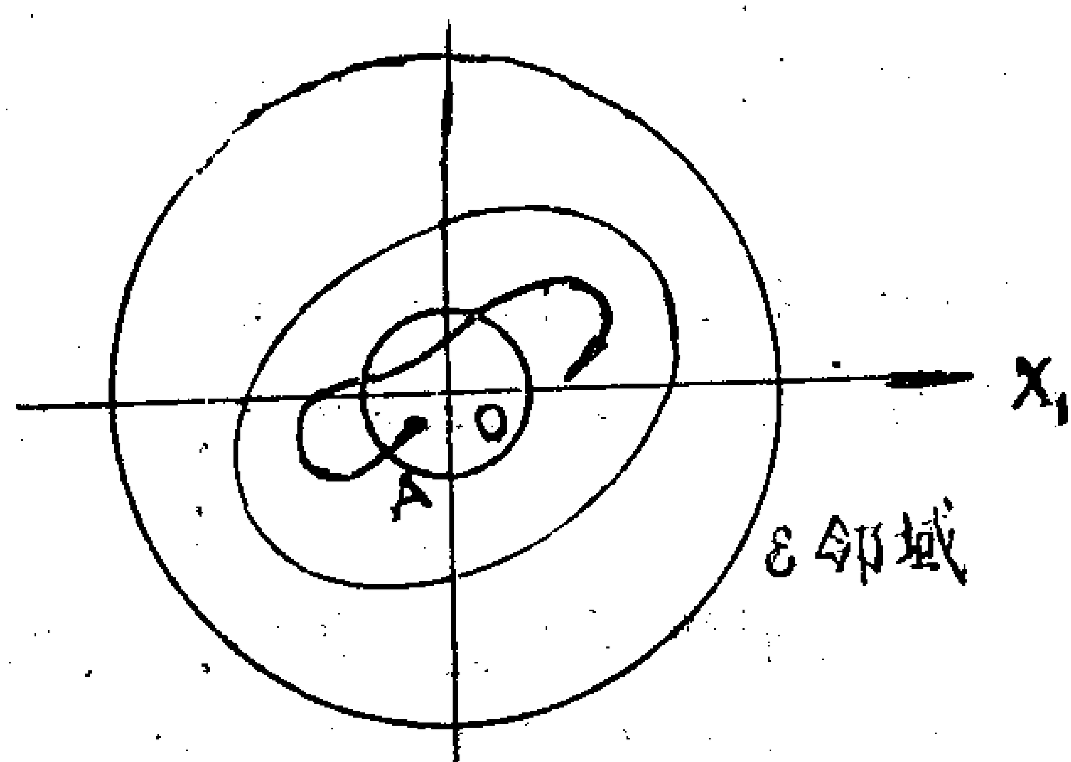


图 6.21

原点的 ε 邻域之外，原因是 $V(x_1,x_2)$ 为李亚普诺夫函数，具有 $\dot{V}(x_1(t),x_2(t))\leqslant 0$ 这一性质，即函数 $V(x_1(t),x_2(t))$ 是非增的．从而当 $t\geqslant t_0$ 时，$V(x_1(t),x_2(t))\leqslant c_1<c$．

这样就作到了，对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\sqrt{x_1^2(t_0)+x_2^2(t_0)}<\delta$ 时，则当 $t\geqslant t_0$ 时，有

$$\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}<\varepsilon$$

因此方程组的零解是稳定的．

定义6.6 （渐近稳定定理）假如对于方程组(6.35)，存在李亚普诺夫函数 $V(x_1,x_2)$，且对任意 $\delta>0$，存在 $\beta>0$ 使得在原点的 δ 邻域之外，有

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),x_2(t))\leqslant-\beta<0$$

则此时方程组的零解是渐近稳定的．

证明 因为满足稳定性条件，由前定理知，对于给定的 $\varepsilon>0$，能找到 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得始点在原点 δ 邻域内的轨线，当 $t\geqslant t_0$ 时不能越出原点的 ε 邻域．又知道函数 $V(x_1,x_2)$ 沿着轨线随 t 的增大而减小（不增），又因为 $V(x_1,x_2)$ 为非负函数，所以当 $t\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(x_1(t),\ x_2(t))=a\geqslant 0$．

如果 $a=0$，由李亚普诺夫函数的第二条件性质知

$$\lim_{t\to+\infty}x_i(t)=0\qquad(i=1,2)．$$

则方程组（6.35）零解的渐近稳定性，即已证明．

现在证明必有 $a=0$

如不然，假如 $a>0$，这时 $t>t_0$ 时必有 $V(x_1(t),x_2(t))\geqslant a$，即轨线在闭曲线

$V(x_1,x_2)=a$ 的外部．而在 $V(x_1,x_2)=a$ 的内部存在原点的 δ_1 邻域，使轨线在原点的 δ_1 邻域之外．

由定理的条件知道，存在 $\beta>0$，在原点的 δ_1 邻域之外，当 $t\geqslant T_0$ 时，有

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\ x_2(t))\leqslant-\beta<0 \tag{6.36}$$

为了导出矛盾，从 T_0 到 t，对（6.36）积分，得

$$V(x_1(t),x_2(t))-V(x_1(T_0),x_2(T_0))\leqslant-\beta(t-T_0)$$

即

$$V(x_1(t),x_2(t))\leqslant V(x_1(T_0),x_2(T_0))-\beta(t-T_0)$$

可知当 t 充分大时，上式右端为负．即有

$$V(x_1(t),\ x_2(t))<0,$$

这与李亚普诺夫函数的正值性矛盾．故必有 $a=0$．于是零解的渐近稳定得证．

例1． 试考虑线性无阻尼振荡零解的稳定性．

将方程

$$\ddot{x}+\omega^2x=0$$

化成方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\omega^2x\end{cases} \tag{6.37}$$

作函数

$$V(x,y)=x^2+\frac{1}{\omega^2}y^2$$

易知 $V(x,y)$ 在（0，0）点附近有定义，且为连续函数，并有

$$V(0,0)=0,\quad V(x,y)>0\quad(x^2+y^2\neq0),$$

及

$$\frac{dV}{dt}=2x\dot{x}+\frac{2}{\omega^2}y\cdot\dot{y}=2\left[xy+\frac{1}{\omega^2}y(-\omega^2x)\right]=0.$$

所以知道方程组（6.37）存在李亚普诺夫函数 $V(x,y)$．根据稳定性定理，知系统的零解是稳定的．

例2． 单摆振动

及

$$\ddot{x}+\frac{g}{l}\sin x=0$$

系统存在零解，考虑零解的稳定性．将方程化成方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin x\end{cases} \tag{6.38}$$

因为这个方程组是可以求得首次积分的，现在考虑用其中的一个首次积分作为李亚普诺夫函数．

将方程组（6.38）第二式两端乘 y，得

$$y\,dy=-\frac{g}{l}(\sin x)\,y\,dt \tag{6.39}$$

由第一式知

$$dx = y\,dt$$

于是（6.39）式为

$$y\,dy = -\frac{g}{l}\sin x\,dx$$

两边积分，得

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{g}{l}\cos x + C$$

取其中的一个首次积分，令其为$V(x,y)$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1-\cos x)$$

易知$V(x,y)$在（0，0）附近有定义，且为连续函数，有

$$V(0,0)=0,\qquad V(x,y)>0\qquad (x^2+y^2\neq 0),$$

并有

$$\frac{dV}{dt} = y\dot{y} + \left(\frac{g}{l}\sin x\right)\dot{x} = y\left(-\frac{g}{l}\sin x\right) + \frac{g}{l}(\sin x)\,y = 0$$

于是可知单摆振动的零解是稳定的.

例3. 考察方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 - x_1^3\\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3\end{cases}\tag{6.40}$$

零解的稳定性.

解 因为在（6.40）的一次近似中，原点为中心，所以此非线性系统的稳定性问题不能通过一次近似来判断.

现在作函数$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$，$V(x_1,x_2)$在原点的邻域上有定义且连续，又有$V(0,0)=0$，　$V(x_1,x_2)>0$　$(x_1^2+x_2^2\neq 0)$.

又

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2) = 2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2) = -2(x_1^4+x_2^4)\leqslant 0$$

知$V(x_1,x_2)$为方程组（6.40）的李亚普诺夫函数. 所以方程组的零解是稳定的.

进一步，因为

$\dot{V}(x_1,x_2) = -2(x_1^4+x_2^4)\leqslant -(x_1^2+x_2^2)$〔因为$x_1^4+x_2^4\geqslant \frac{1}{2}(x_1^4+2x_1x_2+x_2^4) = \frac{1}{2}(x_1+x_2)^2$〕，所以，当$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\delta$时，$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2)\leqslant -\delta^4<0$，可知零解又是渐近稳定的.

例4. $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$中　如$f(x,\dot{x})>0$，$xg(x)>0$　$(x\neq 0)$，则方程的零解是稳定的.

解

因为 $g(x)$为连续函数，且 $xg(x)>0$ （$x\neq 0$），必有 $g(0)=0$. 可知方程存在零解.

现在研究零解的稳定性. 将方程化成方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-f(x,y)y-g(x).\end{cases}\tag{6.41}$$

建立函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(x)dx$$

$V(x,y)$为在原点邻域上定义的连续函数，且有$V(0,0)=0$，$V(x,y)>0$ （$x^2+y^2\neq 0$）且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x,y)&=y\cdot\dot{y}+g(x)\dot{x}\\ &=y[-f(x,y)y-g(x)]+g(x)y\\ &=-f(x,y)y^2\leqslant 0,\end{aligned}$$

因此方程组的零解是稳定的.

习　　题 6.3

1．对于方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1x_2^4,\\ \dot{x}_2=x_2x_1^4.\end{cases}$$

试说明$V(x_1, x_2)=x_1^4+x_2^4$ 是它的李亚普诺夫函数.

2．讨论方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-4x_2-x_1^3,\\ \dot{x}_2=3x_1-x_2^3.\end{cases}$$

的稳定性和渐近稳定性.

3．对于自治系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=Ax_1-x_1x_2^2,\\ \dot{x}_2=Ax_2-x_1^2x_2.\end{cases}$$

当$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$为其李亚普诺夫函数时，A必须为何数？并讨论零解的稳定性.

4．讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1-3x_2+2x_3+x_2x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=3x_1-x_2-x_3+x_1x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=-2x_1+x_2-x_3+x_1x_2.\end{cases}$$

零解的稳定性.

习 题 答 案

习　　题 1.1

1．（1）一阶；　　（2）二阶；

　（3）一阶；　　（4）四阶．

2．（1）是；　　（2）是；

　（3）是；　　（4）不是．

3．（1）$y=e^{\frac{xy'}{y}}$；　　（2）$y'''=3y^{\frac{2}{3}}$；

　（3）$y^2+y'^2=1$；　　（4）$y'''y'=3y''^2$．

4．$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=r^2$．

习　　题 1.2

1．（1）$y^2=x^2+c$；　　（2）$\ln y=ce^x$；

　（3）$e^y=e^x+c$；　　（4）$\sin y\cdot\cos x=c$．

2．（1）$y=1$；　　（2）$y(\ln|x^2-1|+c)=1$，$y=0$；

　（3）$y=(x-c)^3$，$y=0$；$y=(x-2)^3$，$y=0$；

　（4）$x+2y+2=ce^y$，$x+2y+2=0$．

3．$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c$ $(c>0)$，$y=1$ $(-1<x<1)$，$y=-1$ $(-1<x<1)$，$x=1$ $(-1<y<1)$，$x=-1$ $(-1<y<1)$．

4．$y=x^2-5$．

5．（1）$x+\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=c$，$y=x-2n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

　（2）$y=a\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a}+c$．

6．$xy=2$．

7．$x=ce^{kt}$，（1）8倍，（2）$\frac{10^4}{8}$个．

习　　题 1.3

1．（1）$x+y=cx^2$，$x=0$；　　（2）$x(y-x)=cy$，$y=0$；

　（3）$y^2-x^2=cy$，$y=0$；　　（4）$\sin\frac{y}{x}=cx$；

(5) $\ln\frac{x+y}{x}=cx$; (6) $\arcsin\frac{y}{x}=\ln cx\cdot \mathrm{sgn}\, x$, $y=\pm x$.

2. (1) $(y-2x)^3=c(y-x-1)^2$, $y=x+1$;

(2) $2x+y-1=ce^{2y-x}$; (3) $(y-x+5)^6(x+2y-2)=c$;

(4) $y+2=ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$.

3. $(x^2-y^2-1)^5=c(x^2+y^2-3)$.

4. $y=\dfrac{x(a^{\frac{2\omega}{v}}-x^{\frac{2\omega}{v}})}{2a^{\frac{\omega}{v}}x^{\frac{\omega}{v}}}$，坐标原点取在0点，$y$轴沿河岸，正向与水流方向同，$x$轴过0、$A$点，正向由0点指向$A$点.

习 题 1.4

1. (1) $y=2+ce^{-x^2}$; (2) $y=(x-2)^3+c(x-2)$;

(3) $3\rho=2+ce^{-3\theta}$; (4) $i=-\frac{1}{2}(3\sin 2t+\cos 2t)+ce^{6t}$;

(5) $y=cx^2+x^4$; (6) $y=e^x(\ln|x|+c)$;

(7) $y=c\cos x+\sin x$; (8) $xy=(c+x^3)e^{-x}$.

2. $y=-x\ln|x|+cx$.

3. (1) $\frac{1}{y^4}=-x+\frac{1}{4}+ce^{-4x}$; (2) $y^{-3}=-\frac{1}{2}+ce^{3x^2}$;

(3) $y^{-3}=-1-2x+ce^x$; (4) $y^{-1}=-\sin x+ce^x$;

(5) $x^2y^{-2}=-\frac{2}{3}x^3(\frac{2}{3}+\ln x)+c$.

4. $x(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{s-t}f(s)ds$, $|x(t)|\leqslant M$.

习 题 1.5

1. (1) $3x^2y-y^3=c$; (2) $xe^{-y}-y^2=c$;

(3) $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=c$; (4) $4y\ln x+y^4=c$;

(5) $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=c$; (6) $x-y^2\cos^2 x=c$.

2. (1) x, $3x^4+4x^3+6x^2y^2=c$; (2) $\frac{1}{y^4}$, $x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=c$;

(3) $\frac{1}{x^5}$, $y^4=4x^4\ln x+cx^4$; (4) e^{x^2}, $(2x^2y^2+4xy+y^4)e^{x^2}=c$.

3. (1) $e^{\int p(x)dx}$; (2) $\frac{1}{N(y)P(x)}$.

5. (1) $\frac{1}{y^n}e^{(n-1)\int p(x)dx}$; (2) $\frac{1}{\varphi(y)}$.

习　　题 1.6

2．积分曲线族$y=c$，$y=x^2+c$.

3．积分曲线族$y=x+c$，$y=\frac{1}{x+c}$.

4．(1) $(x-c)^2+y^2=r^2$，$y=\pm r$；　(2) $\sqrt{y}=x+c$，$y=0$.

习　　题 1.7

1．(1) $y^2-4x^2=0$；　(2) $4y^2-x^2=0$；

(3) $y=0$；　(4) $y=\pm a$.

2．(1) $y=0$；　(2) $4y^2-x^2=0$；

(3) 无；　(4) $x^2-y^2=0$.

习　　题 1.8

1．(1) $y=ce^{\pm x}$；　(2) $y^2=(x+c)^3$，$y=0$；

(3) $(x+c)^2+y^2=1$，$y=\pm 1$；　(4) $y[1+(x-c)^2]=1$，$y=0$，$y=1$；

(5) $y^2(1-y)=(x+c)^2$，$y=1$；　(6) $\ln cy=x\pm\sin x$，$y=0$；

(7) $\ln cy=x\pm 2e^{\frac{x}{2}}$，$y=0$；　(8) $x=\ln p+\frac{1}{p}$，$y=p-\ln p+c$；

(9) $x=2\mathrm{arctg}\,p+c$，$y=\ln(1+p^2)$，$y=0$；

(10) $x=e^p+c$，$y=(p-1)e^p$，$y=-1$.

2．$\begin{cases} y=cx+\dfrac{c}{c-1}, \\ x=\dfrac{1}{(1-c)^2}. \end{cases}$　3．$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

习　　题 1.9

1．$x^2+2y^2=c^2$.　2．$x^2+y^2=2a^2\ln x+c$.

3．$re^{\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\theta}=c$.　4．以定点为焦点的园锥曲线.

5．2米/秒.　6．37.5米，8米/秒.

7．(2) 当$t=5$秒时，$x=200$米，$v=80$米/秒，$a=16$米/秒^2.

8．171 克.　9．52 分钟。

习　　题 1.10

1．$y=\frac{c_1}{6}x^3\pm\frac{x^2}{2}\sqrt{c_1^2+1}+c_2x+c_3$；

2．$y=c_1+c_2e^{-\frac{x^2}{2}}+x$.　3．$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=a^2$.

4. $\dfrac{y}{y+c_1}=c_2e^{c_1x}$.

5. $(x-c_1)^2+y^2=c_2$.

6. $(y-c_1)^2=c_2x+c_3$.

7. $\ln y=x^3+c_1x+c_2$.

8. $5\ln y=c_1+c_2x^5+8\ln x$.

9. $y^2-2xy=x^2+2\sin x+c_1x+c_2$.

10. $3xy+y^3=c_1x^2+c_2x+c_3$.

11. $y^2=c_1x^2+c_2x$.

12. $y=c_1\operatorname{ctg} x+c_2(1-x\operatorname{ctg} x)$.

13. $y^2=c_1+c_2x^{-2}+\dfrac{x^4}{6}$.

第一章综合习题

1. $xy=ce^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$, $y=0$, $xy=-e^{-2}e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$.

2. $e^x+e^y=c$.

3. $y=ce^{-\frac{x^3}{3}}+1$, $y=1$.

4. $x^2-y^2=cx$, $x=0$.

5. $y=xe^{cy-1}$, $x=ye^{cy+1}$.

6. $(2y+x-3)^4=ce^{-2(x+y)}$, $2y+x-3=0$.

7. $(y+2)^2=c(x+y-1)$.

8. $y=\dfrac{x^2}{2}+ce^{x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$.

9. $y=\dfrac{1}{\cos x}\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+c\right)$.

10. $e^y(x+y^2-2y+2)=c$.

11. $e^{-\frac{1}{y}}\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)=c$, $e^{-\frac{1}{y}}\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)=-e^{-1}$.

12. $y=\varphi(x)-1+ce^{-\varphi(x)}$.

13. $xy\left(c-\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right)=1$.

14. $\sqrt{y}=\sqrt{x}\left(c-\dfrac{1}{2x}\right)$.

15. $y^{-2}=x^2+ce^{x^2}+1$.

16. $\sqrt{x^2+y^2+1}+\dfrac{y}{x}=c$, $\sqrt{x^2+y^2+1}+\dfrac{y}{x}=1+\sqrt{3}$.

17. $\dfrac{3}{4}x^4+3x^2y^2+y^2=c$.

18. $y^4-x^2+2xy^2=c$, $y^4-x^2+2xy-1=0$.

19. $-\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^2}{2}+c$, $y^2x+2y=8x$.

20. $x=cy$. $x=0$.

21. $2x-cy=y^3$.

22. $ye^{x^2}-x^2+y=1+c$, $ye^{x^2}-x^2+y=1$.

23. $(1+x)e^y=2x+c$.

24. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^3}{3}=c$.

25. $x^2+y^2=c$.

26. $y=\dfrac{(x+c)^2}{4}$.

27. $y=\frac{1}{1-cx}$

28. $x^2-y^2=c$

35. $y=\frac{x^2}{2}+c$, $y=(c\pm x)^2$.

36. $y=a\,ch\left(\frac{x-c}{a}\right)$.

37. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

38 $y=2c\sqrt{|x|}+c^2$, $y=-x$.

39. $y=c\pm e^x$, $y=c$.

40. $y=cx-\frac{1}{4}x^2+c^2$, $y=-\frac{x^2}{2}$.

41. $x=\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}(c+a\arcsin p)$, $y=\frac{c+a\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}-ap$.

42. $x=\frac{1}{16p^4}(3-8p^2c-16p^4c^2)$, $y=\frac{c}{p}+\frac{1}{4p^3}$.

43. $y-x+\sqrt{y^2-2xy}=cx^2$, $y-x+\sqrt{y^2-2xy}=c$.

44. $x=\frac{3p+c}{\sqrt{2p+c}}$, $y=\frac{p^2}{\sqrt{2p+c}}$

45. $y^2=2x+1$.

46. $y=\frac{(x+1)^2}{4}$.

47. $y=\pm 2x$.

48. $y=x^2-5$.

49. $y=cx^3$.

50. $y^2-x^2=c$, $y^2+x^2=c$.

51. $v\doteq 0.466$公里/小时，$s=\frac{1}{18\ln\frac{5}{3}}$公里.

52. $t\doteq 0.0008$秒.

53. (1) $t=\frac{400}{\mu}\sqrt{\frac{3}{g}}$秒，

(2) $t=\frac{80\pi}{3\mu}\sqrt{\frac{5}{g}}$秒.

54. $t=\frac{4l}{3\omega\mu}(2R)^{\frac{3}{2}}$秒.

55. $(2gy-a^2)^3=9g^2(ax+c)^2$.

56. (1) $I=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$,

(2) $I=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$.

57. $r=c(1-\cos\theta)$.

58. $x^2+y^2=2cx$.

59. $\rho=c(1-\cos\theta)$.

60. (1) $y=cx$, $\sqrt{x^2+y^2}=ce^{-k\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$;

(2) $y^2-x^2=c$, $ky^2-2xy-kx^2=c$;

(3) $2x^2+y^2=c$, $\sqrt{ky^2-xy-2kx^2}=ce^{\frac{3}{\sqrt{8k^2-1}}\mathrm{arctg}\frac{2k\frac{y}{x}-1}{\sqrt{8k^2-1}}}$.

61. $y=c_1x-\cos x+c_2$.

62. $y=c_1e^{c_1x}+c_2$.

63. $y=c_1(x-e^{-x})+c_2$.

64. $y=\frac{3}{20}x^5+\frac{c_1}{6}x^3+c_2x+c_3$.

65. $y=-\frac{\sqrt{6c_1}}{6}\ln\left|\cos\frac{x+c_2}{6}\right|+c_3$.

66. $y^2=c_1x+c_2$, $y=\sqrt{4x+1}$.

67. $y=c_1e^{\frac{3}{2}x}+c_2x+c_3$, $y=-\frac{4}{9}e^{\frac{3}{2}x}+\frac{5}{3}x-2\frac{5}{9}$.

68. $y=\frac{1}{c_1}e^{c_1(x+c_2)}+\frac{1}{c_1}$

69. $c_1x=\frac{1}{\sqrt{c_2}}e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{c_2}}}$.

70. $y=e^{\frac{c_1x+c_2-1}{c_1x+c_2}}$

71. $y=c_2e^{\frac{1}{2}c_1x^2}$.

72. $y^2=\frac{1}{8}x^4+c_1\ln x+c_2$.

73. $y=c_2e^{c_1x}$.

74. (1) $x=\frac{m}{2k^2}\ln\left(1+\frac{k^2v_0^2}{mg}\right)$.

76. $t\doteq 37.5$秒.

77. $x=\sqrt{9+c_1}\sin(c_2\pm t)+3, y=\pm\sqrt{9+c_1}\cos(c_2\pm t)$.

78. $y^2+z^2=c_1e^{2x}$, $y^4-z^4=4c$.

79. $x^2+y^2+2x-2y-2c_1=0$, $\pm\arcsin\frac{y-1}{\sqrt{2+2c_1}}=\ln z+c_2$,

80. $x=\frac{1}{2}t^4+c_1t^3+c_2t+c_3$, $y=2t^3+3c_1t^2+4c_2$,

$$z=\frac{6t^2+6c_1t}{\frac{1}{2}t^4+c_1t^3+c_2t+c_3}.$$

81. $x^2-y^2=c$, $y^2-z^2=c_2$.

82. $\arcsin\frac{y-1}{\sqrt{2+2c_1}}=c_2\pm\ln z$, $x^2+y^2+2(x-y)=c_1$.

83. $x^2+y^2+z^2=c_1^2$, $x+y+z=c_2$.

84. $x^2+y^2+z^2=c_1, y^2+2xy-x^2=c_2$.

习 题 2.1

1. $(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$.

2. $y-c_1=\frac{(x-c_2)^2}{4c_1}$.

3. $y=\frac{c_1}{2x}+c_2$.

4. $y=c_1\sin(4x-c_2)$.

5. $y=sh(c_1x+c_2)$.

6. $y=-\frac{x^2}{4}+c_1x+c_2$.

习 题 2.2

1. $y=\pm 2\sin n\pi x$, 其中 n 为整数.

2. $\begin{cases}\frac{d}{dx}[r(x)y']-[p(x)+\lambda]y=0,\\ y(a)=y(b)=0\end{cases}$

3. 悬链线族 $y-\lambda=c_1ch\frac{x-c_2}{c_1}$.

习　　题 3.1

1．(1) 不满足；　(2) 满足．

4．(1) 有，$y=0$；　(2) 无；

(3) 有，$y=-\frac{1}{2}x^2$．

5．$\varphi_0(x)=0$，$\varphi_1(x)=\frac{x^2}{2}$，$\varphi_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}$，$\varphi_3(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}-\frac{x^{11}}{4400}$．

6．$\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=1+x-\frac{x^3}{3}$，$\varphi_2(x)=1+x+x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{x^7}{63}$．

8．(1) $x=\frac{1}{2}$，$h_0=1$，$|\varphi(x)-\varphi_3(x)|\leqslant\frac{1}{24}$，$x=1$，$h_0=1$，$|\varphi(x)-\varphi_3(x)|\leqslant\frac{1}{3}$；

(2) $x=\frac{1}{4}$，$h_0=\frac{1}{4}$，$|\varphi(x)-\varphi_2(x)|\leqslant\frac{1}{32}$．

习　　题 4.1

1．(1) 相关；　(2) 无关；

(3) 相关；　(4) 无关．

4．$y=c_1x+c_2e^x$．

5．$y=c_1\ln x+c_2x$．

6．$e^{-\int p(x)dx}=$常数．

8．$y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$．

习　　题 4.2

2．$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+(e^x-e^{-x})\ln(e^x-1)-xe^x-1$．

习　　题 4.3

1．$p>0$，$q>0$．

2．$p>0$，$q\geqslant0$；$p=0$，$q>0$．

3．(1) $y=-5e^{2x}+7e^x$；　(2) $y=2e^{2x}-e^{4x}$；

(3) $y=-e^{-4x}+e^{-5x}$；　(4) $y=e^x$；

(5) $y=2e^x+2xe^x$；　(6) $y=-12e^4e^{-2x}+8e^4xe^{-2x}$；

(7) $y=e^x(2e^{-\pi}\cos x+e^{-\pi}\sin x)$；　(8) $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$；

(9) $y=a\cos\omega x+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega x$；　(10) $y=7-5e^{-x}$．

4．(1) $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+c_3xe^x$；　(2) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$；

(3) $y=c_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+c_3\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$；

(4) $y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}$；

(5) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$；

(6) $y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}x}{2}+c_2\sin\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}x}{2}+c_4\sin\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$;

(7) $y=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+c_3e^x+c_4e^{-x}+c_5\cos x+c_6\sin x$;

(8) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$;

(9) $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$;

(10) $y=(c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+c_4x\cos x+c_5x\sin x)e^x$.

习 题 4.4

1. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}+\frac{5}{12}$.

2. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+2$.

3. $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+c_2\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+\frac{3}{7}e^{2x}$.

4. $y=(c_1+c_2\varphi)e^{3\varphi}+2\varphi^2e^{3\varphi}$.

5. $y=c_1e^{7x}+c_2e^x+\frac{3}{7}x^2+\frac{97}{49}x+\frac{1136}{343}$.

6. $y=\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right)e^{3x}+e^x(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x)$.

7. $x=e^{3t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)+e^t\left(\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{32}\right)$.

8. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{5}{3}\sin 2x$.

9. $y=\left(\frac{3}{26}x+\frac{29}{338}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{13}x+\frac{1}{169}\right)\sin 2x$.

10. $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+5x\cos 3x+3x\sin 3x$.

习 题 4.5

1. $T=2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$秒.

2. $x=\frac{2g\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}$.

3. $S=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

4. $i(t)=\frac{U_0}{5\times 10^2}\sin 10^6t$, $U(t)=-U_0\cos 10^6t$.

5. (1) $i(t)=A\sin(\omega t-\varphi)$, $A=\frac{V}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, $\varphi=\text{arctg}\frac{\omega L}{R}$;

(2) 当 $\omega^2=\frac{1}{LC}$时, $\max A=\frac{V}{R}$.

6．$\alpha=\frac{1}{2CR}$，$\beta=\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{CL}}$，当 $\alpha^2>\frac{1}{CL}$时，

$$i(t)=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-\alpha t}\left[ch\beta t+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{R}{L\beta}\right)sh\beta t\right]\right\}$$；当 $\alpha^2<\frac{1}{CL}$ 时，$\omega=\sqrt{\frac{1}{CL}-\alpha^2}$，

$$i(t)=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-\alpha t}\left[\cos\omega t+\left(\frac{\alpha}{\omega}-\frac{R}{L\omega}\right)\sin\omega t\right]\right\}.$$

第四章综合习题

7．(1) $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\frac{b}{a}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=0$.

习　题 5.1

1．(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-f(x)y-g(x).\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-\frac{c}{m}y-\frac{k}{m}x+\frac{1}{m}f(t).\end{cases}$

(3) $$\begin{cases}\frac{dy_0}{dx}=y_1,\\ \frac{dy_1}{dx}=y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}=-a_1(x)y_2-a_2(x)y_1-a_3(x)y_0.\end{cases}$$

(4) $$\begin{cases}\frac{dz_1}{dx}=z_2,\\ \frac{dz_2}{dx}=a_1z_1+b_1z_3+c_1z_5,\\ \frac{dz_3}{dx}=z_4,\\ \frac{dz_4}{dx}=a_2z_1+b_2z_3+c_2z_5,\\ \frac{dz_5}{dx}=z_6,\\ \frac{dz_6}{dx}=a_3z_1+b_3z_3+c_3z_5.\end{cases}$$

2．(1) $\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{cases}r^2=\frac{Ae^{2t}}{Ae^{2t}+1},\\ \theta=t+\theta_0.\end{cases}$　其中 $A=\frac{r_0^2}{1-r_0^2}$，$r_0=r(0)$，$\theta_0=\theta(0)$；

(3) $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

习　　题 5.2

1．(1) $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} e^x & e^{9x} \\ -e^x & e^{9x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

(3) $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

2．(1) $\begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;　　(2) $e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3te^{2t} & 0 \\ 0 & -2e^{2t} & e^{-t} \\ 1 & e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

3．λ 和 $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ 应满足方程　$\left[e^{-\lambda\tau}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda E\right]\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0$.

4．(1) $\begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{cases} x = e^t(c_1\cos t + c_2\sin t) + e^{-t}(c_3\cos t + c_4\sin t), \\ y = e^t(c_1\sin t - c_2\cos t) + e^{-t}(c_4\cos t - c_3\sin t). \end{cases}$

习　　题 5.3

1．$\begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.　　2．$e^{2x}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

3．$e^{2x}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$　　4．$\begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} & 0 \\ e^x & 0 & e^{-2x} \\ e^x & e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

习　　题 5.4

1．$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t - t^2 - 2 \\ (t-1)e^t - 2t \end{pmatrix}$.

2．$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\sin t - \cos t \\ \sin t + 3\cos t \end{pmatrix}$.

3．$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -2e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} \\ -2te^{2t} \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2e^{-t} \\ -2 & -3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2e^{-t}\ln|e^t-1| \\ -3e^{-t}\ln|e^t-1| \end{pmatrix}$.

第五章综合习题

1. (1) $\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-t} \\ e^t & 0 & -3e^{-t} \\ e^t & e^{2t} & -5e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$;　　(2) $e^t\begin{pmatrix} 0 & 2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 1 & -\cos 2t & \sin 2t \\ 1 & -3\cos 2t & 3\sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & \sin t & 2\sin t \\ 2e^t & \cos t+\sin t & 2\sin t \\ e^t & -\sin t & \cos t-\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & t & 4e^{3t} \\ -2 & 1-2t & 4e^{3t} \\ 1 & -1+t & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$;　　(5) $e^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ 1 & -1 & -1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} x+y=c_1e^{\int[p(t)+q(t)]dt}, \\ x-y=c_2e^{\int[p(t)-q(t)]dt}. \end{cases}$　　3. 作变换 $\begin{cases} x_1=y_1, & \dot{x}_1=y_{n+1}, \\ x_2=y_2, & \dot{x}_2=y_{n+2}, \\ \cdots\cdots & \vdots \\ x_n=y_n, & \dot{x}_n=y_{2n}. \end{cases}$

4. λ 和R应满足方程. $(A+Be^{-\lambda\tau}-\lambda E)R=0$.

6. $a_{11}(t)=0$, $a_{12}(t)=1$, $a_{21}(t)=-1$, $a_{22}(t)=0$.

8. 通解为 $y_1=c_1e^{-at}$, $y_2=c_2e^{t\sin t-2at}$.

习　　题 6.1

1. (1) 稳定结点;　　(2) 不稳定焦点;
   (3) 鞍点;　　(4) 不稳定焦点.

2. (1) 稳定焦点;　　(2) 不稳定焦点;
   (3) 鞍点;　　(4) 鞍点.

3. (1) $b^2-4a^2\geqslant 0$, $b>0$ 不稳定结点, $b<0$ 稳定结点; $b^2-4a^2<0$, $b>0$ 不稳定焦点, $b<0$ 稳定焦点;
   (2) $a^2-4b\geqslant 0$ 稳定结点; $a^2-4b<0$稳定焦点.

习　　题 6.2

1. $x^2+y^2=1$ 稳定极限环.　　2. $x^2+y^2=1$ 不稳定极限环.

3. $x^2+y^2=1$ 半稳定极限环.

4. 令 $t=\alpha s$ (α 常数, s 变量), $\alpha=\sqrt{\dfrac{a}{c}}$, $\mu=\dfrac{b}{\sqrt{ac}}$.

习　　题 6.3

1. 稳定.　2. 渐近稳定.　3. $A\leqslant$时, 渐近稳定.　4. 渐近稳定.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝常微分方程
作者＝微分方程教研室编
页数＝２４９
ＳＳ号＝１０５３５３９６
出版日期＝１９８０年０５月第１版

前言
目录
目录